目　　次

1 姿勢の回転の表現

以下の説明では一般のベクトルはゴシック体で$\mathbf{a}$のように、単位ベクトルは下線を付して$\underline{\mathrm{a}}$のように表現する。

1.1 ロドリゲスの回転公式

任意の3次元直交座標系を$(\mathrm{o}-\mathrm{e},\mathrm{f},\mathrm{g})$とし、座標軸単位ベクトルを $\underline{\mathrm{e}},\underline{\mathrm{f}},\underline{\mathrm{g}}$ としたとき、任意のベクトル$\mathbf{a}$は次のように表される。

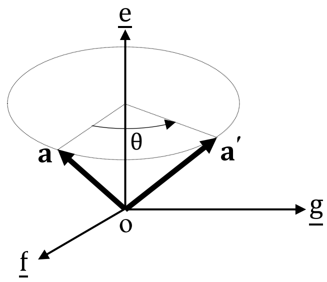

図1.1-1　姿勢の回転

$$\mathbf{a}=(\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{e}})\underline{\mathrm{e}}+(\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{f}})\underline{\mathrm{f}}+(\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{g}})\underline{\mathrm{g}}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{e}}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{f}}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{g}}\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots(1.1\text{-}1)$$

このベクトル$\mathbf{a}$を$\underline{\mathrm{e}}$軸回りに角度θだけ回転したベクトル$\mathbf{a}'$は次のように表される。

$$\mathbf{a}'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{e}}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{f}}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{g}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{e}}\\0\\0\end{pmatrix}+\cos\theta\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{f}}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{g}}\end{pmatrix}+\sin\theta\begin{pmatrix}0\\-\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{g}}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{f}}\end{pmatrix}$$

座標軸単位ベクトル間の外積には次のような関係がある。

$\underline{\mathrm{e}}=\underline{\mathrm{f}}\times\underline{\mathrm{g}}$ 、$\underline{\mathrm{f}}=\underline{\mathrm{g}}\times\underline{\mathrm{e}}$ 、 $\underline{\mathrm{g}}=\underline{\mathrm{e}}\times\underline{\mathrm{f}}$

$\underline{\mathrm{e}}=-\underline{\mathrm{g}}\times\underline{\mathrm{f}}$ 、$\underline{\mathrm{f}}=-\underline{\mathrm{e}}\times\underline{\mathrm{g}}$ 、$\underline{\mathrm{g}}=-\underline{\mathrm{f}}\times\underline{\mathrm{e}}$

$\underline{\mathrm{e}}\times\underline{\mathrm{e}}=\mathbf{0}$ 、 $\underline{\mathrm{f}}\times\underline{\mathrm{f}}=\mathbf{0}$ 、 $\underline{\mathrm{g}}\times\underline{\mathrm{g}}=\mathbf{0}$

この関係を用いると、上記第 3 項のカッコ内は次のようになる。

$$\underline{\mathrm{e}}\times\mathbf{a}=\underline{\mathrm{e}}\times\left\{(\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{e}})\underline{\mathrm{e}}+(\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{f}})\underline{\mathrm{f}}+(\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{g}})\underline{\mathrm{g}}\right\}=(\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{f}})\underline{\mathrm{g}}-(\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{g}})\underline{\mathrm{f}}=\begin{pmatrix}0\\-\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{g}}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{f}}\end{pmatrix}$$

よって、ベクトル$\mathbf{a}'$は次のように表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{a}'&=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{e}}\\0\\0\end{pmatrix}+\cos\theta\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{e}}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{f}}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{g}}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{e}}\\0\\0\end{pmatrix}\right\}+\sin\theta\begin{pmatrix}0\\-\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{g}}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{f}}\end{pmatrix}\\&=(\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{e}})\underline{\mathrm{e}}+\cos\theta\{\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{e}})\underline{\mathrm{e}}\}+\sin\theta(\underline{\mathrm{e}}\times\mathbf{a})\quad\cdots\cdots(1.1\text{-}2)\end{aligned}$$

ここで、ベクトル3重積 $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ を変形して $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

さらに、座標軸単位ベクトルが正規直交基底のベクトルなので、次の内積の関係を用いて式(1.1-2)を変形すると、

$\underline{\mathrm{e}}\cdot\underline{\mathrm{e}}=1$、$\underline{\mathrm{f}}\cdot\underline{\mathrm{f}}=1$、$\underline{\mathrm{g}}\cdot\underline{\mathrm{g}}=1$、$\underline{\mathrm{e}}\cdot\underline{\mathrm{f}}=0$、$\underline{\mathrm{e}}\cdot\underline{\mathrm{g}}=0$、$\underline{\mathrm{f}}\cdot\underline{\mathrm{g}}=0$

$(\mathbf{a}\cdot\underline{\mathrm{e}})\underline{\mathrm{e}}=(\underline{\mathrm{e}}\cdot\underline{\mathrm{e}})\mathbf{a}-\underline{\mathrm{e}}\times(\mathbf{a}\times\underline{\mathrm{e}})=(\underline{\mathrm{e}}\cdot\underline{\mathrm{e}})\mathbf{a}+\underline{\mathrm{e}}\times(\underline{\mathrm{e}}\times\mathbf{a})=\mathbf{a}+[\underline{\mathrm{e}}\times]^2\cdot\mathbf{a}$ となるから、

$$\begin{aligned}\mathbf{a}'&=\mathbf{a}+[\underline{\mathrm{e}}\times]^2\cdot\mathbf{a}+\cos\theta\left\{\mathbf{a}-\mathbf{a}-[\underline{\mathrm{e}}\times]^2\cdot\mathbf{a}\right\}+\sin\theta\,[\underline{\mathrm{e}}\times]\cdot\mathbf{a}\\&=\mathbf{a}+(1-\cos\theta)[\underline{\mathrm{e}}\times]^2\cdot\mathbf{a}+\sin\theta\,[\underline{\mathrm{e}}\times]\cdot\mathbf{a}\\&=\left\{\mathbf{1}+\sin\theta\,[\underline{\mathrm{e}}\times]+(1-\cos\theta)[\underline{\mathrm{e}}\times]^2\right\}\cdot\mathbf{a}\quad\cdots\cdots(1.1\text{-}3)\end{aligned}$$

ここで、$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$:単位行列

$\underline{\mathrm{e}}=\begin{pmatrix}e_x\\e_y\\e_z\end{pmatrix}$:回転軸ベクトル

$[\underline{\mathrm{e}}\times]=\begin{pmatrix}0&-e_z&e_y\\e_z&0&-e_x\\-e_y&e_x&0\end{pmatrix}$:歪対象行列

$$\begin{aligned}[\underline{\mathrm{e}}\times]^2&=\begin{pmatrix}0&-e_z&e_y\\e_z&0&-e_x\\-e_y&e_x&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-e_z&e_y\\e_z&0&-e_x\\-e_y&e_x&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e_y{}^2-e_z{}^2&e_ye_x&e_ze_x\\e_xe_y&-e_z{}^2-e_x{}^2&e_ze_y\\e_xe_z&e_ye_z&-e_x{}^2-e_y{}^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}e_x{}^2-1&e_ye_x&e_ze_x\\e_xe_y&e_y{}^2-1&e_ze_y\\e_xe_z&e_ye_z&e_z{}^2-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

この式(1.1-3)はロドリゲスの回転公式と呼ばれる。

1.2 方向余弦行列

基準座標系 I を(x, y, z)とし、その座標系を回転軸ベクトル$\underline{e}$周りに角度θだけ回転して得られる回転座標系 B を(x_B, y_B, z_B)としたとき、ロドリゲスの回転公式（1.1-3）の$\mathbf{a}$及び$\mathbf{a}'$にそれぞれの座標軸単位ベクトルを順次代入すると、基準座標系 I から回転座標系 B への回転を表す式が次のように得られる。

$$(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) = \left\{\mathbf{1} + \sin\theta\left[\underline{e}\times\right] + (1-\cos\theta)\left[\underline{e}\times\right]^2\right\}\cdot(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) = D_B^I\cdot(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) \quad \cdots\cdots(1.2\text{-}1)$$

$$D_B^I = \left\{\mathbf{1} + \sin\theta\left[\underline{e}\times\right] + (1-\cos\theta)\left[\underline{e}\times\right]^2\right\} \quad :\text{回転行列}\cdots\cdots(1.2\text{-}2)$$

ここで、基準座標系 $I(x, y, z)$が単位行列［$\mathbf{1}$］となる座標系とすると、座標系を表す行列$(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})$は省略して表記できるので、式（1.2-1）の回転行列の各列は回転座標系 $B(x_B, y_B, z_B)$の各軸単位ベクトルを表す。

$$\underline{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}、\ \underline{y} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}、\ \underline{z} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) = D_B^I = \begin{pmatrix} x_{B_x} & y_{B_x} & z_{B_x}\\ x_{B_y} & y_{B_y} & z_{B_y}\\ x_{B_z} & y_{B_z} & z_{B_z}\end{pmatrix}$$

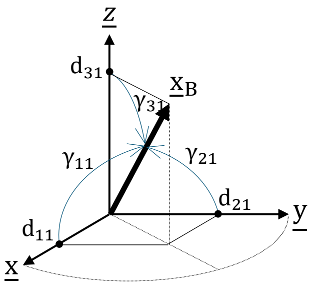

図1.2-1 方向角と方向余弦

右辺の行列の各要素は、右図の方向角 $\gamma_{11},\cdots$ の余弦をとった x, y, z 軸の各成分の大きさを表す方向余弦 $d_{11} = \cos(\gamma_{11}),\cdots$ を用いて表される。

$\underline{x}_B\cdot\underline{x} = \cos(\gamma_{11}) = d_{11}$、$\underline{x}_B\cdot\underline{y} = \cos(\gamma_{21}) = d_{21}$、$\underline{x}_B\cdot\underline{z} = \cos(\gamma_{31}) = d_{31}$

$\underline{y}_B\cdot\underline{x} = \cos(\gamma_{12}) = d_{12}$、$\underline{y}_B\cdot\underline{y} = \cos(\gamma_{22}) = d_{22}$、$\underline{y}_B\cdot\underline{z} = \cos(\gamma_{32}) = d_{32}$

$\underline{z}_B\cdot\underline{x} = \cos(\gamma_{13}) = d_{13}$、$\underline{z}_B\cdot\underline{y} = \cos(\gamma_{23}) = d_{23}$、$\underline{z}_B\cdot\underline{z} = \cos(\gamma_{33}) = d_{33}$

$$D_B^I = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13}\\ d_{21} & d_{22} & d_{23}\\ d_{31} & d_{32} & d_{33}\end{pmatrix} \quad :\text{方向余弦行列} \quad \cdots\cdots(1.2\text{-}3)$$

式(1.2-1)は基準座標系 I から見ても回転座標系 B から見ても同じに見える回転軸$\underline{e}$で表した特別な回転行列で表現されているが、基準座標系 I を一般の回転行列で回転した回転座標系 B は次式のように表される。

$$(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) = (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})\cdot D_B^I \quad :\text{座標系の回転}$$

これを変形すると式(1.2-3)と同様に、回転行列の各列が基準座標系で表した回転座標系 $B(x_B, y_B, z_B)$の各軸単位ベクトルを表すことが分かる。

$$(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})^T\cdot(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) = D_B^I$$

$$D_B^I = \begin{pmatrix} \underline{x}_B\cdot\underline{x} & \underline{y}_B\cdot\underline{x} & \underline{z}_B\cdot\underline{x}\\ \underline{x}_B\cdot\underline{y} & \underline{y}_B\cdot\underline{y} & \underline{z}_B\cdot\underline{y}\\ \underline{x}_B\cdot\underline{z} & \underline{y}_B\cdot\underline{z} & \underline{z}_B\cdot\underline{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13}\\ d_{21} & d_{22} & d_{23}\\ d_{31} & d_{32} & d_{33}\end{pmatrix} \quad :\text{方向余弦行列} \quad \cdots\cdots(1.2\text{-}4)$$

$$\underline{x}_B = \begin{pmatrix}\underline{x}_B\cdot\underline{x}\\ \underline{x}_B\cdot\underline{y}\\ \underline{x}_B\cdot\underline{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d_{11}\\ d_{21}\\ d_{31}\end{pmatrix} = d_{11}\underline{x} + d_{21}\underline{y} + d_{31}\underline{z} \quad :\text{基準座標系から見た回転座標系}x_B\text{軸単位ベクトル}$$

$$\underline{y}_B = \begin{pmatrix}\underline{y}_B\cdot\underline{x}\\ \underline{y}_B\cdot\underline{y}\\ \underline{y}_B\cdot\underline{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d_{12}\\ d_{22}\\ d_{32}\end{pmatrix} = d_{12}\underline{x} + d_{22}\underline{y} + d_{32}\underline{z} \quad :\text{基準座標系から見た回転座標系}y_B\text{軸単位ベクトル}$$

$$\underline{z}_B = \begin{pmatrix}\underline{z}_B\cdot\underline{x}\\ \underline{z}_B\cdot\underline{y}\\ \underline{z}_B\cdot\underline{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d_{13}\\ d_{23}\\ d_{33}\end{pmatrix} = d_{13}\underline{x} + d_{23}\underline{y} + d_{33}\underline{z} \quad :\text{基準座標系から見た回転座標系}z_B\text{軸単位ベクトル}$$

1.3 オイラー軸

回転軸ベクトル$\underline{e}$は次の条件を満たすベクトルで、 $\mathbf{a}-\mathbf{a}'$ 面の2等分線を含み $\mathbf{a}-\mathbf{a}'$ 面に垂直な面内にある。

$$\underline{e}\cdot\mathbf{a} = \underline{e}\cdot\mathbf{a}' \quad \cdots\cdots(1.3\text{-}1)$$

基準座標系(x, y, z)を$\underline{e}$軸周りに角度θだけ回転して得られる回転座標系を(x_B, y_B, z_B)とし、上記の式の$\mathbf{a}$及び$\mathbf{a}'$に座標軸単位ベクトルを順次代入すると次式が得られる。

$$\underline{e}\cdot\underline{x} = \underline{e}\cdot\underline{x}_B \ 、\ \underline{e}\cdot\underline{y} = \underline{e}\cdot\underline{y}_B \ 、\ \underline{e}\cdot\underline{z} = \underline{e}\cdot\underline{z}_B \quad \cdots\cdots(1.3\text{-}2)$$

よって、$\underline{e}$軸は基準座標系から見ても回転座標系から見ても同じに見えるベクトルである。この式を変形して、

$$\underline{e}\cdot(\underline{x}-\underline{x}_B) = 0、\ \underline{e}\cdot(\underline{y}-\underline{y}_B) = 0、\ \underline{e}\cdot(\underline{z}-\underline{z}_B) = 0 \quad \cdots\cdots(1.3\text{-}3)$$

従って、$\underline{e}$軸はそれぞれ $\underline{x}-\underline{x}_B$面、 $\underline{y}-\underline{y}_B$面、 $\underline{z}-\underline{z}_B$面に垂直なベクトルであるから、それら 3 平面に垂直なベクトルを求めて正規化（単位ベクトルに）して、次のように表すことができる。

$$\mathbf{e}' = (\underline{x}-\underline{x}_B)\times(\underline{y}-\underline{y}_B) + (\underline{y}-\underline{y}_B)\times(\underline{z}-\underline{z}_B) + (\underline{z}-\underline{z}_B)\times(\underline{x}-\underline{x}_B)$$

$$\underline{e} = \frac{\mathbf{e}'}{|\mathbf{e}'|} \quad \cdots\cdots (1.3\text{-}4)$$

ゆえに、式(1.3-2)を同時に満たす$\underline{e}$軸は基準座標系と回転座標系が等しくないときには必ず存在し、これをオイラー軸と呼び、その周りの回転角θとで回転体の 3 軸周りの回転を表現する。

1.4 回転ベクトル

式(1.2-2)の回転行列を展開して、

$$D_B^I \equiv (\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) = \left\{\mathbf{1} + \sin\theta\left[\underline{e}\times\right] + (1-\cos\theta)\left[\underline{e}\times\right]^2\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+(1-c)(e_x{}^2-1) & (1-c)e_y e_x - s e_z & (1-c)e_z e_x + s e_y \\ (1-c)e_x e_y + s e_z & 1+(1-c)\left(e_y{}^2-1\right) & (1-c)e_z e_y - s e_x \\ (1-c)e_x e_z - s e_y & (1-c)e_y e_z + s e_x & 1+(1-c)(e_z{}^2-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c+(1-c)e_x{}^2 & (1-c)e_y e_x - s e_z & (1-c)e_z e_x + s e_y \\ (1-c)e_x e_y + s e_z & c+(1-c)e_y{}^2 & (1-c)e_z e_y - s e_x \\ (1-c)e_x e_z - s e_y & (1-c)e_y e_z + s e_x & c+(1-c)e_z{}^2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (1.4\text{-}1)$$

ここで、

D_B^I :座標系 I から見た座標系 B の方向余弦行列

$\underline{e} \equiv \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = e_x\underline{x} + e_y\underline{y} + e_z\underline{z} = e_x\underline{x}_B + e_y\underline{y}_B + e_z\underline{z}_B = \underline{e}_B$:オイラー軸

θ :オイラー軸周りの回転角

$s = \sin\theta$ 、 $c = \cos\theta$

上記のオイラー軸とその周りの回転角を用いて、下記の回転ベクトルを定義することができる。

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} = \theta\underline{e} \quad \text{:回転ベクトル} \quad \cdots\cdots (1.4\text{-}2)$$

ここで、$\underline{e}$:オイラー軸ベクトル

θ :オイラー軸周りの回転角

オイラー軸ベクトルは、上記の回転ベクトルを用いて下記のように表すことができる。

$$\underline{e} \equiv \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_x/\theta \\ \theta_y/\theta \\ \theta_z/\theta \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (1.4\text{-}3)$$

これを式(1.4-1)に代入すると、回転ベクトルによって座標系の方向余弦行列を表すことができる。

$$D_B^I \equiv \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \left\{\mathbf{1} + \sin\theta\left[\underline{e}\times\right] + (1-\cos\theta)\left[\underline{e}\times\right]^2\right\} = \left\{\mathbf{1} + \frac{\sin\theta}{\theta}[\boldsymbol{\theta}\times] + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}[\boldsymbol{\theta}\times]^2\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} c+\frac{1-c}{\theta^2}\theta_x{}^2 & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_y\theta_x - \frac{s}{\theta}\theta_z & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_z\theta_x + \frac{s}{\theta}\theta_y \\ \frac{1-c}{\theta^2}\theta_x\theta_y + \frac{s}{\theta}\theta_z & c+\frac{1-c}{\theta^2}\theta_y{}^2 & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_z\theta_y - \frac{s}{\theta}\theta_x \\ \frac{1-c}{\theta^2}\theta_x\theta_z - \frac{s}{\theta}\theta_y & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_y\theta_z + \frac{s}{\theta}\theta_x & c+\frac{1-c}{\theta^2}\theta_z{}^2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (1.4\text{-}4)$$

上記から、方向余弦と回転ベクトルの関係が次式で表すことができる。

$$\cos\theta = \frac{d_{11}+d_{22}+d_{33}-1}{2} \quad \cdots\cdots (1.4\text{-}5)$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(d_{32}-d_{23})^2+(d_{13}-d_{31})^2+(d_{21}-d_{12})^2}}{2} \quad \cdots\cdots (1.4\text{-}6)$$

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} = \frac{\theta}{2\sin\theta}\begin{pmatrix} d_{32}-d_{23} \\ d_{13}-d_{31} \\ d_{21}-d_{12} \end{pmatrix} \quad \text{:回転ベクトル} \quad \cdots\cdots (1.4\text{-}7)$$