

第2章 慣性航法のアルゴリズム

目 次

1 座標系.....	4
1.1 座標系の表現.....	4
1.2 座標系の回転.....	7
1.3 座標変換.....	10
1.4 回転マトリクスの合成.....	11
2 姿勢の回転の表現.....	12
2.1 ロドリゲスの回転公式.....	12
2.2 回転ベクトル.....	13
2.3 コーニング運動.....	16
3 姿勢の計算法.....	18
3.1 姿勢の表現方法.....	18
3.2 方向余弦マトリクス.....	19
3.3 オイラー角.....	21
3.4 四元数(クォータニオン).....	26
3.5 座標回転の補正(コーニング補正).....	33
3.6 姿勢計算誤差及びその改良法.....	37
3.6.1 姿勢計算誤差の表現.....	37
3.6.2 打ち切り誤差.....	39
3.6.3 姿勢計算誤差の改良法.....	42
3.6.4 姿勢誤差の評価.....	45
4 位置及び速度の計算方法.....	52
4.1 位置及び速度.....	52
4.2 推力と空気力による速度増分ベクトル.....	53
4.3 座標回転の補正(スカーリング補正).....	54
5 補足.....	56
5.1 オイラー角から固定角への変換.....	56
5.2 コーニングドリフトにおける逆マトリクス.....	57
5.3 4ジンバルオイラー角.....	62
5.4 センサ誤差.....	63

図 リ ス ト

図1.1-1	3軸直交座標系	4
図1.1-2	ベクトルの表現	4
図1.2-1	ベクトルの回転	7
図1.2-2	固定角による座標系の回転	8
図1.2-3	座標系の回転	9
図1.3-1	ベクトルの座標変換	10
図2.1-1	姿勢の回転	12
図2.3-1	コーニング運動	17
図3.3-1	オイラー角	21
図3.4-1	回転座標系におけるオイラー軸	31
図3.6.1-1	姿勢計算誤差	37
図3.6.4-1	量子化誤差	45
図3.6.4-2	切り捨て誤差	48
図4.2-1	回転座標系での速度増分の積算	53
図4.3-1	座標回転の補正(スカーリング補正)	54
図5.3-1	4ジンバル安定プラットフォーム	62

表 リ ス ト

表 3.1-1	姿勢の表現方法	18
表 3.3-1	オイラー角から方向余弦マトリクスへの変換	22
表 3.3-2	方向余弦から回転順のオイラー角への変換	23
表 3.3-3	方向余弦から座標軸順のオイラー角への変換	23
表 3.3-4	オイラー角微係数への変換マトリクス	25
表 3.6.3-1	姿勢更新における近似係数	42
表 3.6.3-2	姿勢更新における近似係数の改良	44
表 3.6.4-1	姿勢更新における打ち切り誤差	47
表 5.1-1	方向余弦マトリクスから固定角への変換	56
表 5.4-1	慣性センサ (IMU) の主要特性例	63

1 座標系

本書で用いる座標系や関連諸量について、基本的な表記を説明する。

1.1 座標系の表現

宇宙飛行体の位置、速度及び姿勢を3次元空間で表現するには、基準となる座標系が必要となる。本書で用いている座標系の定義を以下に示す。

(1) 慣性座標系

3軸直交座標系 (o-x, y, z) の座標軸方向単位ベクトル (\underline{x} , \underline{y} , \underline{z}) が次の標準基底で表される正規直交基底を成す座標系は本書で用いるすべての座標系のベースとなる。これを本書では「慣性座標系」と呼ぶこととする。

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.1-1)$$

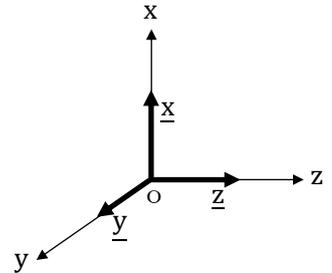


図1.1-1 3軸直交座標系

(2) 方向余弦及びベクトルの表現

3次元空間における任意のベクトル \mathbf{a} は基底の一次結合で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{a} \cdot \underline{x})\underline{x} + (\mathbf{a} \cdot \underline{y})\underline{y} + (\mathbf{a} \cdot \underline{z})\underline{z} \\ &= a_x\underline{x} + a_y\underline{y} + a_z\underline{z} \dots\dots\dots (1.1-2) \end{aligned}$$

また、成分を列挙する形式で下記のように表される。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \underline{x} \\ \mathbf{a} \cdot \underline{y} \\ \mathbf{a} \cdot \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.1-3)$$

図1.1-2 に示したベクトル \mathbf{a} は、座標系の各軸ベクトルとの間の角度で表すことができる。この角度は方向角と呼ばれ、その余弦をとった方向余弦によって各軸方向の成分の大きさを表す。

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \begin{pmatrix} \cos(\gamma_x) \\ \cos(\gamma_y) \\ \cos(\gamma_z) \end{pmatrix} = |\mathbf{a}| \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.1-4)$$

$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$: 方向角

d_x, d_y, d_z : 方向余弦

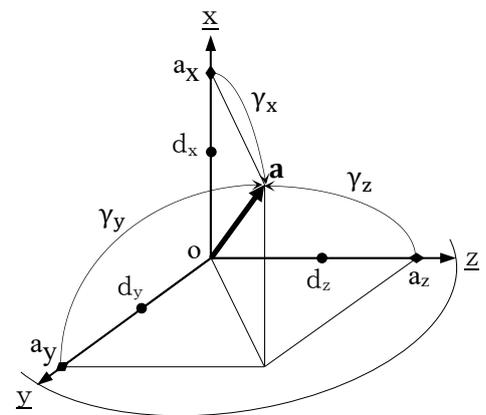


図1.1-2 ベクトルの表現

なお、単位ベクトルは下線付きで表し、一般のベクトルと区別するものとする。

$$\underline{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.1-5)$$

(3) 一般の座標系でのベクトルの表現

一般の座標系を3軸直交座標系 G (o- ξ, η, ζ) としたとき、3つの座標軸単位ベクトルは、前記(2)項に示した方向余弦を用いて下記のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \underline{\xi} &= (\underline{\xi} \cdot \underline{x})\underline{x} + (\underline{\xi} \cdot \underline{y})\underline{y} + (\underline{\xi} \cdot \underline{z})\underline{z} = \xi_x\underline{x} + \xi_y\underline{y} + \xi_z\underline{z} \\ \underline{\eta} &= (\underline{\eta} \cdot \underline{x})\underline{x} + (\underline{\eta} \cdot \underline{y})\underline{y} + (\underline{\eta} \cdot \underline{z})\underline{z} = \eta_x\underline{x} + \eta_y\underline{y} + \eta_z\underline{z} \\ \underline{\zeta} &= (\underline{\zeta} \cdot \underline{x})\underline{x} + (\underline{\zeta} \cdot \underline{y})\underline{y} + (\underline{\zeta} \cdot \underline{z})\underline{z} = \zeta_x\underline{x} + \zeta_y\underline{y} + \zeta_z\underline{z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.1-6)$$

正規直交基底と方向余弦の一次式で表されるこの座標軸ベクトルも正規直交基底を成し、前記(2)項に示したベクトル \mathbf{a} は式(1.1-2)と同様に、下記のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\mathbf{a} \cdot \underline{\xi}) \underline{\xi} + (\mathbf{a} \cdot \underline{\eta}) \underline{\eta} + (\mathbf{a} \cdot \underline{\zeta}) \underline{\zeta} \\ &= a_{\xi} \underline{\xi} + a_{\eta} \underline{\eta} + a_{\zeta} \underline{\zeta} \dots\dots\dots(1.1-7)\end{aligned}$$

また、ベクトル \mathbf{a} は上記の成分(方向余弦)を列挙する形式で式(1.1-3)と同様に表すことができるが、どの座標系で表したベクトルかを明示するため、基準とする座標系の記号を右上添字として付加して識別するものとする。ただし、慣性座標系で表したベクトルの場合は省略できる。上記の座標系(o- ξ, η, ζ)の識別記号をGとすれば、「座標系Gで表したベクトル \mathbf{a} 」は下記のように表す。これは「座標系Gから見たベクトル \mathbf{a} 」ということもある。ベクトル \mathbf{a}^G の基準座標系は座標系Gである。なお、座標系Gの座標軸ベクトルは慣性座標系で表されるので、座標軸ベクトルで表現したベクトルは慣性座標系のベクトルである。

$$\mathbf{a}^G = \begin{pmatrix} a_{\xi} \\ a_{\eta} \\ a_{\zeta} \end{pmatrix} : \text{座標系Gで表したベクトル } \mathbf{a} \dots\dots\dots(1.1-8)$$

$$\mathbf{a} = a_x \underline{x} + a_y \underline{y} + a_z \underline{z} = a_{\xi} \underline{\xi} + a_{\eta} \underline{\eta} + a_{\zeta} \underline{\zeta} : \text{慣性座標系で表したベクトル}$$

(4) 方向余弦マトリクス

一般の座標系は基準とする座標系に回転操作を加えて定義される。

慣性座標系Iに回転操作を加えて3軸直交座標系G(o- ξ, η, ζ)を定義したとき、

$$(\underline{\xi} \quad \underline{\eta} \quad \underline{\zeta}) = (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) \cdot \mathbf{D}_G^I : \text{座標系の回転} \dots\dots\dots(1.1-9)$$

$$\mathbf{D}_G^I : \text{座標系Iから座標系Gへの回転マトリクス} \dots\dots\dots(1.1-10)$$

式(1.1-9)に両辺に左から $(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})^T$ を乗じて、

$$(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})^T \cdot (\underline{\xi} \quad \underline{\eta} \quad \underline{\zeta}) = (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})^T \cdot (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) \cdot \mathbf{D}_G^I$$

$$(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})^T \cdot (\underline{\xi} \quad \underline{\eta} \quad \underline{\zeta}) = \begin{pmatrix} \underline{\xi} \cdot \underline{x} & \underline{\eta} \cdot \underline{x} & \underline{\zeta} \cdot \underline{x} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{y} & \underline{\eta} \cdot \underline{y} & \underline{\zeta} \cdot \underline{y} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{z} & \underline{\eta} \cdot \underline{z} & \underline{\zeta} \cdot \underline{z} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_G^I$$

$$\mathbf{D}_G^I = (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})^T \cdot (\underline{\xi} \quad \underline{\eta} \quad \underline{\zeta}) = \begin{pmatrix} \underline{\xi} \cdot \underline{x} & \underline{\eta} \cdot \underline{x} & \underline{\zeta} \cdot \underline{x} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{y} & \underline{\eta} \cdot \underline{y} & \underline{\zeta} \cdot \underline{y} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{z} & \underline{\eta} \cdot \underline{z} & \underline{\zeta} \cdot \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} = (\underline{\xi}^I \quad \underline{\eta}^I \quad \underline{\zeta}^I)$$

慣性座標系Iで表されたベクトル $\underline{\xi}^I, \underline{\eta}^I, \underline{\zeta}^I$ は元の $\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\zeta}$ と同じなので座標系の識別記号を省略して、

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_G^I &= (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})^T \cdot (\underline{\xi} \quad \underline{\eta} \quad \underline{\zeta}) = \begin{pmatrix} \underline{\xi} \cdot \underline{x} & \underline{\eta} \cdot \underline{x} & \underline{\zeta} \cdot \underline{x} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{y} & \underline{\eta} \cdot \underline{y} & \underline{\zeta} \cdot \underline{y} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{z} & \underline{\eta} \cdot \underline{z} & \underline{\zeta} \cdot \underline{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} = (\underline{\xi} \quad \underline{\eta} \quad \underline{\zeta}) : \text{方向余弦マトリクス} \dots\dots\dots(1.1-11)\end{aligned}$$

座標系の回転に用いる回転マトリクスの各要素は方向余弦で、これは方向余弦マトリクスと呼ばれる。

一般に、ある座標系A(o- x_A, y_A, z_A)は、基準とする座標系R(o- x_R, y_R, z_R)から見た方向余弦マトリクスで表され、それぞれの座標系を識別する記号を添字として用いて、下記のように表現される。

$$\left. \begin{aligned}\underline{x}_A &= d_{11} \underline{x}_R + d_{21} \underline{y}_R + d_{31} \underline{z}_R \\ \underline{y}_A &= d_{12} \underline{x}_R + d_{22} \underline{y}_R + d_{32} \underline{z}_R \\ \underline{z}_A &= d_{13} \underline{x}_R + d_{23} \underline{y}_R + d_{33} \underline{z}_R\end{aligned} \right\} \text{のとき}$$

$$\mathbf{D}_A^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = (\underline{x}_A^R \quad \underline{y}_A^R \quad \underline{z}_A^R) \cdots \cdots \cdots (1.1-12)$$

上記の方向余弦マトリクスは、添字を上から下にD、R、Aと読むものとする。

この座標系Rから見た座標系Aの方向余弦マトリクスは、座標系Rから見た座標系Aの3つの座標軸ベクトルで構成されている、ということもできる。

また、この方向余弦マトリクスの転置マトリクスは、下記のように表される。

$$\mathbf{D}_A^{RT} = \mathbf{D}_R^A = \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} = (\underline{x}_R^A \quad \underline{y}_R^A \quad \underline{z}_R^A) = (\underline{x}_A^R \quad \underline{y}_A^R \quad \underline{z}_A^R)^T \cdots \cdots \cdots (1.1-13)$$

方向余弦マトリクスとその転置マトリクスの積は、下記に示したように単位マトリクスになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_A^{RT} \cdot \mathbf{D}_A^R &= \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} \\ &= (\underline{x}_A^R \quad \underline{y}_A^R \quad \underline{z}_A^R)^T \cdot (\underline{x}_A^R \quad \underline{y}_A^R \quad \underline{z}_A^R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \cdots \cdots (1.1-14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_A^{RT} &= \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} \\ &= (\underline{x}_R^A \quad \underline{y}_R^A \quad \underline{z}_R^A)^T \cdot (\underline{x}_R^A \quad \underline{y}_R^A \quad \underline{z}_R^A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \cdots \cdots (1.1-15) \end{aligned}$$

また、方向余弦マトリクスとその逆マトリクスの積は単位マトリクスになるはずだから、

$$\mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_A^{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \cdots \cdots (1.1-16)$$

このように、方向余弦マトリクスの逆マトリクスは転置マトリクスに等しく、方向余弦マトリクスが直交行列であることが分かる。

$$\mathbf{D}_A^{R^{-1}} = \mathbf{D}_A^{RT} \cdots \cdots \cdots (1.1-17)$$

方向余弦マトリクスの3個の列ベクトルおよび3個の行ベクトルは正規直交基底を成す。

\underline{x}_A^R 、 \underline{y}_A^R 、 \underline{z}_A^R : 方向余弦マトリクス \mathbf{D}_A^R の3個の列ベクトルは正規直交基底を成す

\underline{x}_R^A 、 \underline{y}_R^A 、 \underline{z}_R^A : 方向余弦マトリクス \mathbf{D}_A^R の3個の行ベクトルは正規直交基底を成す

$$\mathbf{D}_A^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \\ \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \\ \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \underline{x}_R^A \\ \leftarrow \underline{y}_R^A \\ \leftarrow \underline{z}_R^A \end{matrix}$$

1.2 座標系の回転

(1) ベクトルの回転

図1.2-1に示した任意のベクトル \mathbf{a} は下記のように表される。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \cos \beta \\ a \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1.2-1)$$

上記のベクトルをx軸回りに角度 θ だけ回転したベクトル \mathbf{a}' は下記のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \cos(\beta + \theta) \\ a \sin \alpha \sin(\beta + \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha (\cos \beta \cos \theta - \sin \beta \sin \theta) \\ a \sin \alpha (\sin \beta \cos \theta + \cos \beta \sin \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \cos \theta - a_z \sin \theta \\ a_z \cos \theta + a_y \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a} \dots\dots\dots(1.2-2) \end{aligned}$$

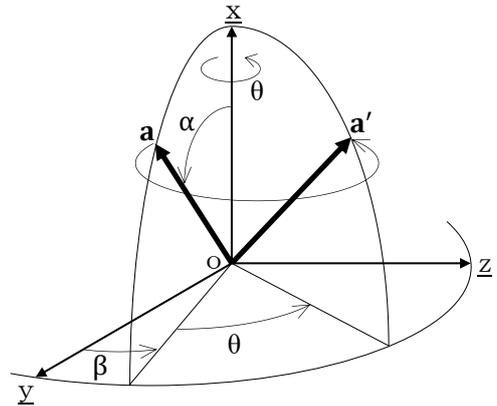


図1.2-1 ベクトルの回転

(2) 回転マトリクス

前記(1)項に示したベクトルの回転はy軸及びz軸についても考えられ、それらは下記のように表される。

$$\mathbf{a}' = [\theta]_i \cdot \mathbf{a} \dots\dots\dots(1.2-3)$$

ここで、 $i=1$ のとき、第1軸(x軸)回りの回転

$i=2$ のとき、第2軸(y軸)回りの回転

$i=3$ のとき、第3軸(z軸)回りの回転を表す下記のマトリクスである。

$$[\theta]_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1.2-4)$$

$$[\theta]_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1.2-5)$$

$$[\theta]_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1.2-6)$$

上記の回転を多段階に、任意の軸回りに任意の順序で行って得られるベクトルは下記のように表され、この回転によってベクトルを任意の方向に向けることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(n)'} &= [\theta_n]_p \cdot \mathbf{a}^{(n-1)'} = [\theta_n]_p \dots [\theta_3]_k \cdot \mathbf{a}'' = [\theta_n]_p \dots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot \mathbf{a}' \\ &= [\theta_n]_p \dots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \mathbf{a} \quad : \text{固定角によるベクトルの回転} \dots\dots\dots(1.2-7) \end{aligned}$$

ここで、 $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n$: 回転角を表し、それぞれ1回目、2回目 \dots n回目の回転角

$i, j, k \dots p$: 回転軸を表し、それぞれ1 or 2 or 3の何れかを示す

回転軸を表す番号は、座標系の第1軸、第2軸、第3軸を表す。x、y、z としないのは、座標系の軸名称がxyzとは限らないからである。なお、 θ_i は同一の座標系における座標軸周りの回転角で固定角と呼ばれ、回転する度に順次できる新しい座標軸周りの回転角(後述するオイラー角)とは異なる。

(3) 固定角による座標系の回転

基準とする座標系I(o-x, y, z)から見た任意の座標系R(o-x_R, y_R, z_R)及び座標系G(o-x_G, y_G, z_G)の方向余弦マトリクスを下記のように表す。

$$\mathbf{D}_R^I = \begin{pmatrix} x_R^I & y_R^I & z_R^I \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_G^I = \begin{pmatrix} x_G^I & y_G^I & z_G^I \end{pmatrix}$$

ここで式(1.2-7)に示した固定角によるベクトルの回転を適用して座標系R(o-x_R, y_R, z_R)の座標軸単位ベクトルx_R^I, y_R^I, z_R^Iを座標系Iにおいて回転し、得られた軸を新たに座標系G(o-x_G, y_G, z_G)の座標軸単位ベクトルx_G^I, y_G^I, z_G^Iとすれば、それらは下記のように表される。

$$x_G^I = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot x_R^I$$

$$y_G^I = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot y_R^I$$

$$z_G^I = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot z_R^I$$

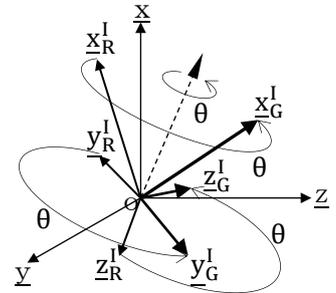


図1.2-2 固定角による座標系の回転

上記の3式をまとめてマトリクス表現にすると、

$$\begin{pmatrix} x_G^I & y_G^I & z_G^I \end{pmatrix} = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \begin{pmatrix} x_R^I & y_R^I & z_R^I \end{pmatrix} \cdots \cdots \cdots (1.2-8)$$

$$\mathbf{D}_G^I = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \mathbf{D}_R^I \cdots \cdots \cdots (1.2-9)$$

この両辺に右からD_R^Iの転置マトリクスを掛けて変形すると、

$$\mathbf{D}_G^I \cdot \mathbf{D}_R^{I^T} = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \mathbf{D}_R^I \cdot \mathbf{D}_R^{I^T} = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i$$

$$(\mathbf{D}_G^R)^I \equiv \mathbf{D}_G^I \cdot \mathbf{D}_R^{I^T} = \mathbf{D}_G^I \cdot \mathbf{D}_R^I = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdots \cdots \cdots (1.2-10)$$

$$\begin{pmatrix} x_G^I & y_G^I & z_G^I \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_G^R)^I \cdot \begin{pmatrix} x_R^I & y_R^I & z_R^I \end{pmatrix} \text{ : 座標系の回転} \cdots \cdots \cdots (1.2-11)$$

この式(1.2-11)は固定角による座標系の回転を表す。(D_G^R)^Iは座標系Iから見たときの座標系Rから座標系Gへの回転マトリクスで、1.1-(4)項に示す方向余弦マトリクスによる座標系の回転を表す式(1.1-9)とは異なる。本書では次の形式のマトリクスを「固定角型回転マトリクス」と呼ぶこととする。

$$(\mathbf{D}_B^A)^R \equiv \mathbf{D}_B^R \cdot \mathbf{D}_A^{R^T}$$

R: 基準の座標系

D_A^R: 基準の座標系Rから見た座標系Aの方向余弦マトリクス

D_B^R: 基準の座標系Rから見た座標系Bの方向余弦マトリクス

次に、座標系Iから見たときの座標系Rを座標系Aへ回転し、さらに座標系Aから座標系Gへ回転する操作は、上記の式(1.2-11)の表記を用いて

$$\begin{pmatrix} x_A^I & y_A^I & z_A^I \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_A^R)^I \cdot \begin{pmatrix} x_R^I & y_R^I & z_R^I \end{pmatrix} \text{ 及び}$$

$$\begin{pmatrix} x_G^I & y_G^I & z_G^I \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_G^A)^I \cdot \begin{pmatrix} x_A^I & y_A^I & z_A^I \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x_G^I & y_G^I & z_G^I \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_G^A)^I \cdot (\mathbf{D}_A^R)^I \cdot \begin{pmatrix} x_R^I & y_R^I & z_R^I \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_G^R)^I \cdot \begin{pmatrix} x_R^I & y_R^I & z_R^I \end{pmatrix}$$

よって、座標系Iから見たときの座標系Rを座標系Aへ回転させ、さらに座標系Aから座標系Gへ回転させる固定角型回転マトリクスは次のように表される。

$$(\mathbf{D}_G^R)^I = (\mathbf{D}_G^A)^I \cdot (\mathbf{D}_A^R)^I \cdots \cdots \cdots (1.2-12)$$

(4) オイラー角による座標系の回転

座標系I(o-x, y, z)から見た任意の座標系R(o-x_R, y_R, z_R)の座標軸単位ベクトルをx_R^I, y_R^I, z_R^Iで表したとき、x_R軸回りに角度φ₁だけ回転してできる座標系を座標系A(o-x_A, y_A, z_A)とすると、新たにできた座標系

の座標軸単位ベクトルは以下のように表される。

$$\begin{aligned}\underline{x}_A^I &= \underline{x}_R^I \\ \underline{y}_A^I &= \cos \varphi_1 \cdot \underline{y}_R^I + \sin \varphi_1 \cdot \underline{z}_R^I \\ \underline{z}_A^I &= -\sin \varphi_1 \cdot \underline{y}_R^I + \cos \varphi_1 \cdot \underline{z}_R^I\end{aligned}$$

上式をまとめると、回転後の座標系は1.2-(2)項に示した回転マトリクスを用いて下記のように表現される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_A^I & \underline{y}_A^I & \underline{z}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \cdots \cdots (1.2-13)$$

上記の座標系の回転は、 y_R 軸及び z_R 軸についても考えられるので、一般的には何れかの軸回りに角度 φ_1 だけ回転してできる座標系を下記のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_A^I & \underline{y}_A^I & \underline{z}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot [\varphi_1]_i \cdots \cdots (1.2-14)$$

ここで、 $i=1$ or 2 or 3

上式の回転マトリクスは座標系R($o-x_R, y_R, z_R$)から見た座標系A($o-x_A, y_A, z_A$)の各成分(方向余弦)をマトリクスにまとめたものであり、1.1-(4)項に示した方向余弦マトリクスとして下記で表される。

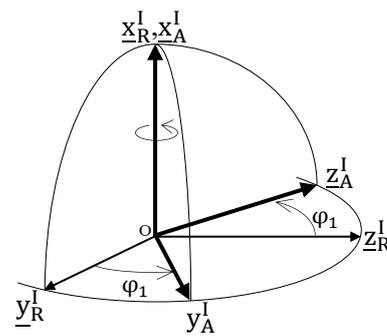


図1.2-3 座標系の回転

$$\mathbf{D}_A^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_A^I & \underline{y}_A^I & \underline{z}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_A^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{y}_A^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{z}_A^I \cdot \underline{x}_R^I \\ \underline{x}_A^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{y}_A^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{z}_A^I \cdot \underline{y}_R^I \\ \underline{x}_A^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{y}_A^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{z}_A^I \cdot \underline{z}_R^I \end{pmatrix} = [\varphi_1]_i \cdots \cdots (1.2-15)$$

よって、上記式(1.2-11)の座標系の回転は、方向余弦マトリクスでは下記のように表現される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_A^I & \underline{y}_A^I & \underline{z}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot [\varphi_1]_i \cdots \cdots (1.2-16)$$

次に、回転してできた新しい座標系を基準として x_A, y_A, z_A のいずれかの軸回りに角度 φ_2 だけ回転してできる座標系を座標系B($o-x_B, y_B, z_B$)とすると、上記と同様に新たにできた座標系は以下のように表される。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \underline{x}_B^I & \underline{y}_B^I & \underline{z}_B^I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{x}_A^I & \underline{y}_A^I & \underline{z}_A^I \end{pmatrix} \cdot [\varphi_2]_j \\ &= \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j\end{aligned}$$

このように、順次新しくできた座標系の軸回りに回転を続け、最終的に座標系G($o-x_G, y_G, z_G$)が得られるとすると、それは下記のように表される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_G^I & \underline{y}_G^I & \underline{z}_G^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p \cdots \cdots (1.2-17)$$

これを方向余弦マトリクスで表現して

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_G^I &= \mathbf{D}_R^I \cdot [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p \\ &= \mathbf{D}_R^I \cdot \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_B^A \cdots \mathbf{D}_G^F \cdots \cdots (1.2-18)\end{aligned}$$

また、座標系Rから座標系Gまでの回転を表すマトリクスは、上式の両辺に左から \mathbf{D}_R^I の転置マトリクスを掛けて変形して下記のように表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_R^{I^T} \cdot \mathbf{D}_G^I &= \mathbf{D}_R^{I^T} \cdot \mathbf{D}_R^I \cdot [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p = [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p \\ \mathbf{D}_G^R &\equiv \mathbf{D}_R^{I^T} \cdot \mathbf{D}_G^I = \mathbf{D}_R^R \cdot \mathbf{D}_G^I = [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p \cdots \cdots (1.2-19)\end{aligned}$$

この回転を表すマトリクス \mathbf{D}_G^R は前記(3)項に示した固定角型回転マトリクス(\mathbf{D}_G^R)とは異なり、座標系Rから見た座標系Gの方向余弦マトリクスである。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \underline{x}_G^I & \underline{y}_G^I & \underline{z}_G^I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D}_G^R : \text{座標系の回転} \cdots \cdots (1.2-20) \\ \mathbf{D}_G^R &= \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_G^I & \underline{y}_G^I & \underline{z}_G^I \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{x}_G^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{y}_G^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{z}_G^I \cdot \underline{x}_R^I \\ \underline{x}_G^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{y}_G^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{z}_G^I \cdot \underline{y}_R^I \\ \underline{x}_G^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{y}_G^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{z}_G^I \cdot \underline{z}_R^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_G^R & \underline{y}_G^R & \underline{z}_G^R \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1.2-21)$$

1.3 座標変換

図1.3-1に示した任意のベクトル \mathbf{a} は、慣性座標系 (o-x, y, z) で下記のように表される。

$$\mathbf{a} = a_x \underline{x} + a_y \underline{y} + a_z \underline{z} \dots\dots\dots(1.3-1)$$

次に、座標系 R (o-x_R, y_R, z_R) を x_R 軸回りに角度 φ だけ回転して得られる座標系を座標系 A (o-x_A, y_A, z_A) としたとき、ベクトル \mathbf{a} は座標系 A で下記のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \underline{x} + a_y \underline{y} + a_z \underline{z} = a_{x_A} \underline{x}_A + a_{y_A} \underline{y}_A + a_{z_A} \underline{z}_A \text{より} \\ \mathbf{a}^A &\equiv \begin{pmatrix} a_{x_A} \\ a_{y_A} \\ a_{z_A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \cos \beta \\ a \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1.3-2) \end{aligned}$$

また、ベクトル \mathbf{a} は座標系 R では下記のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \underline{x} + a_y \underline{y} + a_z \underline{z} = a_{x_R} \underline{x}_R + a_{y_R} \underline{y}_R + a_{z_R} \underline{z}_R \text{より} \\ \mathbf{a}^R &\equiv \begin{pmatrix} a_{x_R} \\ a_{y_R} \\ a_{z_R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \cos(\beta + \varphi) \\ a \sin \alpha \sin(\beta + \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha (\cos \beta \cos \varphi - \sin \beta \sin \varphi) \\ a \sin \alpha (\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{x_A} \\ a_{y_A} \cos \varphi - a_{z_A} \sin \varphi \\ a_{z_A} \cos \varphi + a_{y_A} \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{x_A} \\ a_{y_A} \\ a_{z_A} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a}^A \\ &= [\varphi]_1 \cdot \mathbf{a}^A \end{aligned}$$

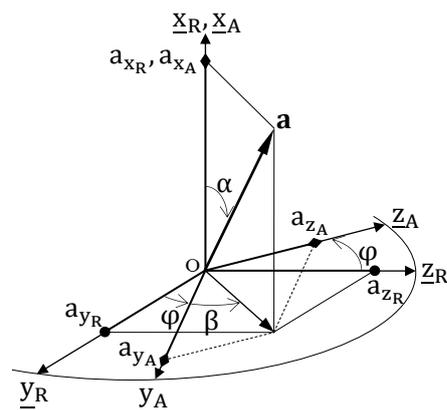


図1.3-1 ベクトルの座標変換

座標系 R を n 回連続して回転して座標系 A が得られるものとする、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^R &= [\varphi_1]_i \cdot \mathbf{a}^{A1} \\ \mathbf{a}^{A1} &= [\varphi_2]_j \cdot \mathbf{a}^{A2} \\ &\vdots \\ \mathbf{a}^{An-1} &= [\varphi_n]_p \cdot \mathbf{a}^A \\ \mathbf{a}^R &= [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \dots [\varphi_n]_p \cdot \mathbf{a}^A \dots\dots\dots(1.3-3) \end{aligned}$$

この回転マトリクスは座標系 R から見た座標系 A の方向余弦マトリクスでもあるから、上式は一般的に下記のように表現できる。

$$\mathbf{a}^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a}^A = \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{a}^A \dots\dots\dots(1.3-4)$$

上記は座標軸ベクトルを用いて下記のように表現することができる。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R & \underline{y}_R & \underline{z}_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{x_R} \\ a_{y_R} \\ a_{z_R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_A & \underline{y}_A & \underline{z}_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{x_A} \\ a_{y_A} \\ a_{z_A} \end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} a_{xR} \\ a_{yR} \\ a_{zR} \end{pmatrix} = (\underline{x}_R \quad \underline{y}_R \quad \underline{z}_R)^T \cdot (\underline{x}_A \quad \underline{y}_A \quad \underline{z}_A) \cdot \begin{pmatrix} a_{xA} \\ a_{yA} \\ a_{zA} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_A^R \cdot \begin{pmatrix} a_{xA} \\ a_{yA} \\ a_{zA} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1.3-5)$$

このように、上記の式(1.3-3)、式(1.3-4)および式(1.3-5)はベクトル \mathbf{a} を座標系Aの座標軸成分で表した量から座標系Rの座標軸成分で表した量に変換するもので、座標変換と呼ばれる。

同様に、座標系A($o-x_A, y_A, z_A$)を回転して得られる座標系を座標系B($o-x_B, y_B, z_B$)としたとき、ベクトル \mathbf{a} は座標系Aで下記のように表される。

$$\mathbf{a}^A = (\underline{x}_B^A \quad \underline{y}_B^A \quad \underline{z}_B^A) \cdot \mathbf{a}^B = \mathbf{D}_B^A \cdot \mathbf{a}^B \dots\dots\dots(1.3-6)$$

従って、このような座標変換を繰り返すと、下記のように表現できる。

$$\mathbf{a}^R = \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{a}^A = \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_B^A \cdot \mathbf{a}^B = \dots = \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_B^A \dots \mathbf{D}_G^F \cdot \mathbf{a}^G \dots\dots\dots(1.3-7)$$

よって、ベクトルの座標変換は一般的に、1.2-(4)項に示した座標系間の回転を表す方向余弦マトリクスを用いて、下記のように表現される。

$$\mathbf{a}^R = \mathbf{D}_G^R \cdot \mathbf{a}^G \quad \text{:ベクトルの座標変換} \dots\dots\dots(1.3-8)$$

ここで、 \mathbf{D}_G^R : 座標系Rから見た座標系Gの方向余弦マトリクス

\mathbf{a}^R : 座標系Rから見たベクトル \mathbf{a}

\mathbf{a}^G : 座標系Gから見たベクトル \mathbf{a}

1.4 回転マトリクスの合成

回転マトリクスや方向余弦マトリクスおよび後述する四元数は、四則演算が自由に行える代数系で「体」と呼ばれる。これらの「体」は乗法において順序が入れ換えられない「非可換体」である。本書ではこれらを「体(非可換体)」と呼ぶこととする。

1.2(2)項の回転マトリクスはオイラー角順あるいは固定角順に合成され、下記の3種類の体(非可換体)が考えられる。なお、固定角は補足5.1項に示した方法でオイラー角から変換できる。

(1) $\mathbf{D}_R^I = [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \dots [\varphi_n]_p$: 方向余弦マトリクス

$$\mathbf{D}_G^R = \mathbf{D}_R^{I^T} \cdot \mathbf{D}_G^I \quad \text{: 方向余弦マトリクス}$$

上記は座標系の回転とベクトルの座標変換に利用できる。

(2) $(\mathbf{D}_G^R)^I = \mathbf{D}_G^I \cdot \mathbf{D}_R^{I^T}$: 固定角型回転マトリクス

上記は座標系の回転とベクトルの回転に利用できる。

(3) $(\mathbf{D}_G^R) = [\theta_n]_p \dots [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i$: 固定角順回転マトリクス

上記は座標系の回転とベクトルの回転および、ベクトルの座標変換に利用できる。

2 姿勢の回転の表現

2.1 ロドリゲスの回転公式

任意の3次元直交座標系を $(o - \underline{e}, \underline{f}, \underline{g})$ とし、座標軸単位ベクトルを $\underline{e}, \underline{f}, \underline{g}$ としたとき、任意のベクトル \underline{a} は次のように表される。

$$\underline{a} = (\underline{a} \cdot \underline{e})\underline{e} + (\underline{a} \cdot \underline{f})\underline{f} + (\underline{a} \cdot \underline{g})\underline{g} = \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \\ \underline{a} \cdot \underline{g} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.1-1)$$

このベクトル \underline{a} を \underline{e} 軸回りに角度 θ だけ回転したベクトル \underline{a}' は次のように表される。

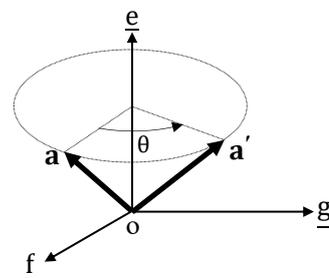


図2.1-1 姿勢の回転

$$\begin{aligned} \underline{a}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \\ \underline{a} \cdot \underline{g} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \\ \underline{a} \cdot \underline{g} \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{a} \cdot \underline{g} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

座標軸単位ベクトル間の外積には次のような関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \underline{e} &= \underline{f} \times \underline{g}, & \underline{e} &= -\underline{g} \times \underline{f}, & \underline{e} \times \underline{e} &= \mathbf{0} \\ \underline{f} &= \underline{g} \times \underline{e}, & \underline{f} &= -\underline{e} \times \underline{g}, & \underline{f} \times \underline{f} &= \mathbf{0} \\ \underline{g} &= \underline{e} \times \underline{f}, & \underline{g} &= -\underline{f} \times \underline{e}, & \underline{g} \times \underline{g} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} : \text{座標軸単位ベクトルの外積関係}$$

この関係を用いると、上記右辺第3項のカッコ内は次のように表される。

$$\underline{e} \times \underline{a} = \underline{e} \times \{(\underline{a} \cdot \underline{e})\underline{e} + (\underline{a} \cdot \underline{f})\underline{f} + (\underline{a} \cdot \underline{g})\underline{g}\} = (\underline{a} \cdot \underline{f})\underline{g} - (\underline{a} \cdot \underline{g})\underline{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{a} \cdot \underline{g} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \end{pmatrix}$$

よって、ベクトル \underline{a}' は次のように表される。

$$\begin{aligned} \underline{a}' &= \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \left\{ \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \\ \underline{a} \cdot \underline{g} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{a} \cdot \underline{g} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \end{pmatrix} \\ &= (\underline{a} \cdot \underline{e})\underline{e} + \cos\theta \{ \underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{e})\underline{e} \} + \sin\theta (\underline{e} \times \underline{a}) \dots\dots\dots(2.1-2) \end{aligned}$$

ここで、ベクトル3重積 $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$ を変形して $(\underline{b} \cdot \underline{a})\underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$

さらに、座標軸単位ベクトルが正規直交基底のベクトルなので次の内積の関係が成り立ち、これを用いて式(2.1-2)を変形すると、

$\underline{e} \cdot \underline{e} = 1, \underline{f} \cdot \underline{f} = 1, \underline{g} \cdot \underline{g} = 1, \underline{e} \cdot \underline{f} = 0, \underline{e} \cdot \underline{g} = 0, \underline{f} \cdot \underline{g} = 0$: 座標軸単位ベクトルの内積関係

$(\underline{a} \cdot \underline{e})\underline{e} = (\underline{e} \cdot \underline{e})\underline{a} - \underline{e} \times (\underline{a} \times \underline{e}) = (\underline{e} \cdot \underline{e})\underline{a} + \underline{e} \times (\underline{e} \times \underline{a}) = \underline{a} + [\underline{e} \times]^2 \cdot \underline{a}$ となるから、

$$\begin{aligned} \underline{a}' &= \underline{a} + [\underline{e} \times]^2 \cdot \underline{a} + \cos\theta \{ \underline{a} - \underline{a} - [\underline{e} \times]^2 \cdot \underline{a} \} + \sin\theta [\underline{e} \times] \cdot \underline{a} \\ &= \underline{a} + (1 - \cos\theta)[\underline{e} \times]^2 \cdot \underline{a} + \sin\theta [\underline{e} \times] \cdot \underline{a} \\ &= \{ \mathbf{1} + \sin\theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos\theta)[\underline{e} \times]^2 \} \cdot \underline{a} \dots\dots\dots(2.1-3) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: 単位マトリクス

$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$: 回転軸ベクトル

$$[\underline{e} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} : \text{歪対象マトリクス (skew symmetric matrix)} \dots\dots\dots(2.1-4)$$

$$\begin{aligned}
 [\underline{e} \times]^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_y^2 - e_z^2 & e_y e_x & e_z e_x \\ e_x e_y & -e_z^2 - e_x^2 & e_z e_y \\ e_x e_z & e_y e_z & -e_x^2 - e_y^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e_x^2 - 1 & e_y e_x & e_z e_x \\ e_x e_y & e_y^2 - 1 & e_z e_y \\ e_x e_z & e_y e_z & e_z^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x^2 & e_y e_x & e_z e_x \\ e_x e_y & e_y^2 & e_z e_y \\ e_x e_z & e_y e_z & e_z^2 \end{pmatrix} - \mathbf{1} \dots\dots\dots(2.1-5)
 \end{aligned}$$

この式(2.1-3)はロドリゲスの回転公式と呼ばれる。

2.2 回転ベクトル

(1) オイラー軸

回転軸ベクトル \underline{e} は次の条件を満たすベクトルで、図2.1-1の $\mathbf{a} - \mathbf{a}'$ 面の2等分線を含み $\mathbf{a} - \mathbf{a}'$ 面に垂直な面内にある。

$$\underline{e} \cdot \mathbf{a} = \underline{e} \cdot \mathbf{a}' \dots\dots\dots(2.2-1)$$

基準の慣性座標系Iを(x,y,z)とし、 \underline{e} 軸周りに角度 θ だけ回転して得られる回転座標系Bを(x_B, y_B, z_B)とし、上記の式の \mathbf{a} 及び \mathbf{a}' に座標軸単位ベクトルを順次代入すると次式が得られる。

$$\underline{e} \cdot \underline{x} = \underline{e} \cdot \underline{x}_B, \quad \underline{e} \cdot \underline{y} = \underline{e} \cdot \underline{y}_B, \quad \underline{e} \cdot \underline{z} = \underline{e} \cdot \underline{z}_B \dots\dots\dots(2.2-2)$$

従って、 \underline{e} 軸はそれぞれ $\underline{x} - \underline{x}_B$ 面、 $\underline{y} - \underline{y}_B$ 面、 $\underline{z} - \underline{z}_B$ 面に垂直なベクトルであるから、それら3平面に垂直なベクトルを求めて正規化(単位ベクトルに)して、次のように表すことができる。

$$\underline{e} = \frac{(\underline{x} - \underline{x}_B) \times (\underline{y} - \underline{y}_B) + (\underline{y} - \underline{y}_B) \times (\underline{z} - \underline{z}_B) + (\underline{z} - \underline{z}_B) \times (\underline{x} - \underline{x}_B)}{\left| (\underline{x} - \underline{x}_B) \times (\underline{y} - \underline{y}_B) + (\underline{y} - \underline{y}_B) \times (\underline{z} - \underline{z}_B) + (\underline{z} - \underline{z}_B) \times (\underline{x} - \underline{x}_B) \right|} \dots\dots\dots(2.2-3)$$

ゆえに、式(2.2-2)を同時に満たす \underline{e} 軸は基準座標系Iと回転座標系Bが等しくないときには必ず存在し、これをオイラー軸と呼び、その周りの回転角 θ で回転体の3軸周りの回転を表現する。

式(2.2-2)をまとめて表現し、慣性座標系Iが標準基底の座標軸として($\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}$) = $[\mathbf{1}]$ となるのを代入すると、

$$\begin{aligned}
 (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})^T \cdot \underline{e} &= (\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B)^T \cdot \underline{e} \\
 \underline{e} &= (\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B)^T \cdot \underline{e} = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \underline{e} = \mathbf{D}_I^B \cdot \underline{e} \\
 \underline{e} &= \mathbf{D}_I^B \cdot \underline{e} : \underline{e} \text{軸の慣性座標系Iから回転座標系Bへの座標変換} \dots\dots\dots(2.2-4)
 \end{aligned}$$

(2) 回転ベクトル

慣性座標系Iを(x,y,z)とし、その座標系を回転軸ベクトル \underline{e} 周りに角度 θ だけ回転して得られる回転座標系Bを(x_B, y_B, z_B)としたとき、ロドリゲスの回転公式(2.1-3)の \mathbf{a} 及び \mathbf{a}' にそれぞれの座標軸単位ベクトルを順次代入すると、慣性座標系Iから回転座標系Bへの回転を表す式が次のように得られる。

$$(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) = \mathbf{D}_B^I \cdot (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) \dots\dots\dots(2.2-5)$$

$$\mathbf{D}_B^I = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} : \text{回転マトリクス} \dots\dots\dots(2.2-6)$$

ここで、慣性座標系Iを表すマトリクス($\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}$)は単位マトリクス $[\mathbf{1}]$ となって省略して表記できるので、式(2.2-5)の回転マトリクスは慣性座標系Iから見た回転座標系Bの方向余弦マトリクスを表し、その各列は回転座標系B(x_B, y_B, z_B)の各軸単位ベクトルを表す。

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{慣性座標系各軸単位ベクトル}$$

$$\mathbf{D}_B^I = (\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} : \text{慣性座標系Iから見た回転座標系Bの方向余弦マトリクス}$$

式(2.2-6)の回転マトリクスを展開して、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_B^I &\equiv \begin{pmatrix} x_B & y_B & z_B \end{pmatrix} = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 + (1 - c)(e_x^2 - 1) & (1 - c)e_y e_x - s e_z & (1 - c)e_z e_x + s e_y \\ (1 - c)e_x e_y + s e_z & 1 + (1 - c)(e_y^2 - 1) & (1 - c)e_z e_y - s e_x \\ (1 - c)e_x e_z - s e_y & (1 - c)e_y e_z + s e_x & 1 + (1 - c)(e_z^2 - 1) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c + (1 - c)e_x^2 & (1 - c)e_y e_x - s e_z & (1 - c)e_z e_x + s e_y \\ (1 - c)e_x e_y + s e_z & c + (1 - c)e_y^2 & (1 - c)e_z e_y - s e_x \\ (1 - c)e_x e_z - s e_y & (1 - c)e_y e_z + s e_x & c + (1 - c)e_z^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.2-7)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\underline{e} \equiv \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = e_x \underline{x} + e_y \underline{y} + e_z \underline{z} = e_x x_B + e_y y_B + e_z z_B = \underline{e}_B \quad \text{:オイラー軸} \dots\dots\dots(2.2-8)$$

θ :オイラー軸周りの回転角

$$s = \sin \theta \quad , \quad c = \cos \theta$$

上記のオイラー軸とその周りの回転角を用いて、下記の回転ベクトルを定義することができる。

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} = \theta \underline{e} \quad \text{:回転ベクトル} \dots\dots\dots(2.2-9)$$

ここで、 \underline{e} :オイラー軸ベクトル

θ :オイラー軸周りの回転角

オイラー軸ベクトルは、上記の回転ベクトルを用いて下記のように表すことができる。

$$\underline{e} \equiv \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_x/\theta \\ \theta_y/\theta \\ \theta_z/\theta \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.2-10)$$

式(2.2-9)を式(2.2-7)に代入すると、回転ベクトルによって座標系の方向余弦マトリクスを表すことができる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_B^I &\equiv \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} = \left\{ \mathbf{1} + \frac{\sin \theta}{\theta} [\boldsymbol{\theta} \times] + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta} \times]^2 \right\} \\
 &= \begin{pmatrix} c + \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_x^2 & \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_y \theta_x - \frac{s}{\theta} \theta_z & \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_z \theta_x + \frac{s}{\theta} \theta_y \\ \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_x \theta_y + \frac{s}{\theta} \theta_z & c + \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_y^2 & \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_z \theta_y - \frac{s}{\theta} \theta_x \\ \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_x \theta_z - \frac{s}{\theta} \theta_y & \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_y \theta_z + \frac{s}{\theta} \theta_x & c + \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_z^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.2-11)
 \end{aligned}$$

上記から、方向余弦と回転ベクトルの関係が次式で表すことができる。

$$\cos \theta = \frac{d_{11} + d_{22} + d_{33} - 1}{2} \dots\dots\dots(2.2-12)$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{(d_{32} - d_{23})^2 + (d_{13} - d_{31})^2 + (d_{21} - d_{12})^2}}{2} \dots\dots\dots(2.2-13)$$

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} = \frac{\theta}{2 \sin \theta} \begin{pmatrix} d_{32} - d_{23} \\ d_{13} - d_{31} \\ d_{21} - d_{12} \end{pmatrix} \quad \text{:回転ベクトル} \dots\dots\dots(2.2-14)$$

(3) 回転ベクトルの微係数

次に、慣性座標系に対する回転座標系の回転角速度を次のように表す。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B \dots\dots\dots (2.2-15)$$

オイラー軸 \underline{e} は式(2.2-4)を変形して次のようにも表されるから、

$$\underline{e} = \mathbf{D}_B^I \cdot \underline{e}_B \dots\dots\dots (2.2-16)$$

これを微分して

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\mathbf{D}}_B^I \cdot \underline{e}_B + \mathbf{D}_B^I \cdot \dot{\underline{e}}_B = \mathbf{D}_B^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times] \cdot \underline{e}_B + \mathbf{D}_B^I \cdot \dot{\underline{e}}_B = \mathbf{D}_B^I \cdot (\boldsymbol{\omega}_B \times \underline{e}_B + \dot{\underline{e}}_B)$$

ここで、単位ベクトルの微分値は単位ベクトルにはならないので、表現を次のように書き換えて、

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\mathbf{D}}_B^I \cdot \underline{e}_B + \mathbf{D}_B^I \cdot \dot{\underline{e}}_B = \mathbf{D}_B^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times] \cdot \underline{e}_B + \mathbf{D}_B^I \cdot \dot{\underline{e}}_B = \mathbf{D}_B^I \cdot (\boldsymbol{\omega}_B \times \underline{e}_B + \dot{\underline{e}}_B) \dots\dots\dots (2.2-17)$$

ここで、 $\underline{e} = \underline{e}_B$ であるから上式を変形すると、

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \dot{\underline{e}} &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{e} + \dot{\underline{e}} \\ (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \dot{\underline{e}} - \dot{\underline{e}} &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{e} \\ \{ \mathbf{1} - (\mathbf{D}_B^I)^T \} \cdot \dot{\underline{e}} &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \quad \text{これに式(2.2-6)を代入して、} \\ \left[\mathbf{1} - \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\}^T \right] \cdot \dot{\underline{e}} &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \\ \left[\mathbf{1} - \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times]^T + (1 - \cos \theta) \left([\underline{e} \times]^2 \right)^T \right\} \right] \cdot \dot{\underline{e}} &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \\ \left\{ \sin \theta [\underline{e} \times] - (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \dot{\underline{e}} &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \\ \sin \theta (\underline{e} \times \dot{\underline{e}}) - (1 - \cos \theta) \underline{e} \times (\underline{e} \times \dot{\underline{e}}) &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \end{aligned}$$

ベクトル3重積 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ より、

$$\sin \theta (\underline{e} \times \dot{\underline{e}}) - (1 - \cos \theta) \{ (\underline{e} \cdot \dot{\underline{e}})\underline{e} - (\underline{e} \cdot \underline{e})\dot{\underline{e}} \} = \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B$$

さらに、ベクトル \underline{e} が一定の大きさ1なので変化率 $\dot{\underline{e}}$ が \underline{e} に垂直になることから $\underline{e} \cdot \dot{\underline{e}} = 0$ 、 $\underline{e} \cdot \underline{e} = 1$ より、

$$\begin{aligned} \sin \theta (\underline{e} \times \dot{\underline{e}}) + (1 - \cos \theta) \dot{\underline{e}} &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \\ \{ (1 - \cos \theta) \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] \} \cdot \dot{\underline{e}} &= [\underline{e} \times] \cdot \boldsymbol{\omega}_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= \{ (1 - \cos \theta) \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] \}^{-1} \cdot [\underline{e} \times] \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & -\sin \theta e_z & \sin \theta e_y \\ \sin \theta e_z & 1 - \cos \theta & -\sin \theta e_x \\ -\sin \theta e_y & \sin \theta e_x & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \cdot [\underline{e} \times] \cdot \boldsymbol{\omega}_B \quad \text{ここで、} s = \sin \theta, c = \cos \theta \text{ とおいて、} \\ &= \frac{1}{2(1-c)^2} \begin{pmatrix} (1-c)^2 + s^2 e_x^2 & s^2 e_x e_y + s(1-c)e_z & s^2 e_x e_z - s(1-c)e_y \\ s^2 e_x e_y - s(1-c)e_z & (1-c)^2 + s^2 e_y^2 & s^2 e_y e_z + s(1-c)e_x \\ s^2 e_x e_z + s(1-c)e_y & s^2 e_y e_z - s(1-c)e_x & (1-c)^2 + s^2 e_z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2(1-c)^2} \begin{pmatrix} s(1-c)(e_y^2 + e_z^2) & -s(1-c)e_x e_y - (1-c)^2 e_z & -s(1-c)e_x e_z + (1-c)^2 e_y \\ -s(1-c)e_x e_y + (1-c)^2 e_z & s(1-c)(e_z^2 + e_x^2) & -s(1-c)e_y e_z - (1-c)^2 e_x \\ -s(1-c)e_x e_z - (1-c)^2 e_y & -s(1-c)e_y e_z + (1-c)^2 e_x & s(1-c)(e_x^2 + e_y^2) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2(1-c)} \begin{pmatrix} s(e_y^2 + e_z^2) & -s e_x e_y - (1-c)e_z & -s e_x e_z + (1-c)e_y \\ -s e_x e_y + (1-c)e_z & s(e_z^2 + e_x^2) & -s e_y e_z - (1-c)e_x \\ -s e_x e_z - (1-c)e_y & -s e_y e_z + (1-c)e_x & s(e_x^2 + e_y^2) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2(1-c)} \left\{ (1-c) \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} e_x^2 - 1 & e_x e_y & e_x e_z \\ e_x e_y & e_y^2 - 1 & e_y e_z \\ e_x e_z & e_y e_z & e_z^2 - 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2(1-c)} \{ (1-c) [\underline{e} \times] - s [\underline{e} \times]^2 \} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [\underline{e} \times] - \frac{s}{1-c} [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \end{aligned}$$

ここで $\frac{s}{1-c} = \cot \frac{\theta}{2}$ より

$$\dot{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left\{ [\underline{e} \times] - \cot \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \dots\dots\dots (2.2-18)$$

また、オイラー軸周りの回転ベクトルの微係数は、オイラー軸の定義より下記で表される。

$$\dot{\theta} = \omega_B \cdot \underline{e} \dots\dots\dots(2.2-19)$$

オイラー軸は $\theta=0$ に特異点を持ち、その時のオイラー軸とその周りの回転角並びにその微係数は下記と見なすことができる。

$$\underline{e} = \frac{\omega_B}{|\omega_B|}, \theta = 0, \dot{\underline{e}} = \mathbf{0}, \dot{\theta} = |\omega_B| \dots\dots\dots(2.2-20)$$

式(2.2-9)の回転ベクトルの微分は、式(2.2-19)及び式(2.2-18)を代入して

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \dot{\theta} \underline{e} + \theta \dot{\underline{e}} \\ &= (\omega_B \cdot \underline{e}) \underline{e} + \theta \left\{ \frac{1}{2} ([\underline{e} \times] - \cot \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times]^2) \cdot \omega_B \right\} \end{aligned}$$

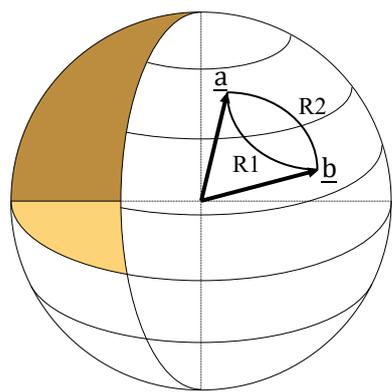
右辺第1項にベクトル3重積 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}$ を適用して

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= (\underline{e} \cdot \underline{e}) \omega_B - \underline{e} \times (\omega_B \times \underline{e}) + \frac{\theta}{2} \left(\underline{e} \times \omega_B - \cot \frac{\theta}{2} \underline{e} \times (\underline{e} \times \omega_B) \right) \\ &= \omega_B + \underline{e} \times (\underline{e} \times \omega_B) + \frac{\theta}{2} \left(\underline{e} \times \omega_B - \cot \frac{\theta}{2} \underline{e} \times (\underline{e} \times \omega_B) \right) \\ &= \omega_B + \frac{\theta}{2} (\underline{e} \times \omega_B) + \left(1 - \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} \right) \{ \underline{e} \times (\underline{e} \times \omega_B) \} \end{aligned}$$

ここでオイラー軸を回転ベクトルに直すと下記のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega_B + \frac{1}{2} (\theta \times \omega_B) + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} \right) \{ \theta \times (\theta \times \omega_B) \} \\ &= \omega_B + \frac{1}{2} (\theta \times \omega_B) + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) \{ \theta \times (\theta \times \omega_B) \} \\ &= \left\{ \mathbf{1} + \frac{1}{2} [\theta \times] + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) [\theta \times]^2 \right\} \cdot \omega_B \dots\dots\dots(2.2-21) \end{aligned}$$

上記の右辺第2項以降は非可換な角速度 (Non Commutativity rate) と呼ばれ、回転座標系の回転角速度 ω_B が回転ベクトル θ と並行でない (両ベクトルの外積がゼロでない) ときに発生するので、回転ベクトル θ の初期値が異なると回転角速度 ω_B が同じでも上式(2.2-21)の積分は異なる結果となる。従って、式(2.2-21)は過去の回転の結果が現在の回転に影響を与えるため、回転の時間的順序が変更できないことを意味しており、右図のベクトル \underline{a} (座標系の一つの軸ベクトルとする) が経路R1を通してベクトル \underline{b} へ回転してから経路R2を通して元の位置のベクトル \underline{a} へ戻った場合と、逆に先に経路R2を通してから経路R1を通して元のベクトル \underline{a} へ戻った場合とでは、ベクトル \underline{a} 周りの回転 (座標系の回転) が異なることを意味している。



2.3 コーニング運動

慣性座標系Iを(o-x, y, z)として回転座標系Bを(o-x_B, y_B, z_B)としたとき、慣性座標系から見た回転座標系の回転は式(2.2-21)の回転ベクトルで表されるから、この式から逆に回転座標系の各軸周りの回転角速度を求めると下記で表される。

$$\omega_B = \left\{ \mathbf{1} + \frac{1}{2} [\theta \times] + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) [\theta \times]^2 \right\}^{-1} \cdot \dot{\theta} \dots\dots\dots(2.3-1)$$

この逆マトリクスを補足5.2項に示したように解いて下記のように求められる。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \left\{ \mathbf{1} - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta} \times] + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) [\boldsymbol{\theta} \times]^2 \right\} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \dots \dots \dots (2.3-2)$$

ここで、 $\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B$

慣性座標系に対して回転座標系が下記で定義されるコーニング運動を行っているとするとする。

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_y \underline{y} + \theta_z \underline{z} = \theta \sin \Omega t \underline{t}_y + \theta \cos \Omega t \underline{t}_z = \theta \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.3-3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\theta}_y \underline{y} + \dot{\theta}_z \underline{z} = \theta \Omega \cos \Omega t \underline{t}_y - \theta \Omega \sin \Omega t \underline{t}_z = \theta \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Omega t \\ -\sin \Omega t \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.3-4)$$

ここで、 θ : コーニング半頂角

Ω : コーニング角速度

このとき、回転座標系の各軸周りの回転角速度は式(2.3-2)に式(2.3-3)及び式(2.3-4)を代入して下記で表される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_B &= \left\{ \mathbf{1} - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \theta \begin{pmatrix} 0 & -\cos \Omega t & \sin \Omega t \\ \cos \Omega t & 0 & 0 \\ -\sin \Omega t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \theta^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \Omega t - 1 & \sin \Omega t \cos \Omega t \\ 0 & \sin \Omega t \cos \Omega t & \cos^2 \Omega t - 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \theta \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Omega t \\ -\sin \Omega t \end{pmatrix} \\ &= \theta \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Omega t \\ -\sin \Omega t \end{pmatrix} - (1 - \cos \theta) \Omega \begin{pmatrix} -\cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \theta \Omega \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Omega t \sin^2 \Omega t - \cos \Omega t - \sin^2 \Omega t \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \cos^2 \Omega t - \sin \Omega t \cos^2 \Omega t + \sin \Omega t \end{pmatrix} \\ &= \theta \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Omega t \\ -\sin \Omega t \end{pmatrix} - (1 - \cos \theta) \Omega \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \Omega \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix} \\ &= \Omega \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \sin \theta \cos \Omega t \\ -\sin \theta \sin \Omega t \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.3-5) \end{aligned}$$

コーニング半頂角 θ が微小角なら、

$$\boldsymbol{\omega}_B \approx \Omega \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{2} \\ \theta \cos \Omega t \\ -\theta \sin \Omega t \end{pmatrix}$$

$$\omega_{x_B} \approx \frac{1}{2} \theta^2 \Omega$$

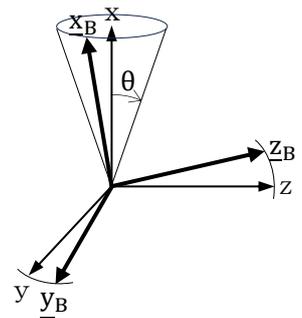


図2.3-1 コーニング運動

従って、回転座標系 x_B 軸周りには回転を与えていないのに上記で示される一定の角速度が発生することになる。これはコーニングドリフトと呼ばれ、サーボテーブルにジャイロを搭載し、図2.3-1のようにサーボテーブルの2軸に式(2.3-2)の角振動を与えると、そのジャイロは式(2.3-5)の角速度を検知して出力することとなる。

上記の式(2.3-5)によれば、コーニングドリフトは図2.3-1に示した単位ベクトル \underline{x}_B 軸の先端が描く円の面積($\pi\theta^2$)に比例することが分かる。

3 姿勢の計算法

3.1 姿勢の表現方法

宇宙飛行体の姿勢は、宇宙飛行体に固定した座標系(ここでは機体座標系と呼ぶ)を定義し、1.1項に示したように、基準となる座標系(ここでは慣性座標系と呼ぶ)から見た機体座標系の方向余弦マトリクスとして表される。但し、方向余弦マトリクスは9個の要素から成って計算量が比較的多いので、姿勢を求める航法計算においては、要素数を減らした各種の方法が下記の表のように考案されている。

表3.1-1 姿勢の表現方法

名称	パラメータ数	特異点	特徴	
方向余弦マトリクス	9	無し	9パラメータ(3つの座標軸ベクトル)のうち、6パラメータ(2つの座標軸ベクトル)を先ず求め、他の3パラメータ(残り1つの座標軸ベクトル)はベクトルの外積により求める。	
オイラー角	3ジンバル オイラー角	3	有り	3ジンバル機構における隣り合うジンバル間の相対角であり、中間のジンバルが-90度回転した位置と+90度回転した位置に特異点がある。中間ジンバルがこの特異点の位置に来た状態をジンバル・ロックと呼び、3つのジンバル軸が同一平面に並んで、自由度が一つ無くなっている。
	4ジンバル オイラー角	4	無し	3ジンバル機構におけるジンバル・ロックを無くすため、もう1つのジンバルを追加して4ジンバル機構としたものである。通常は3ジンバルで運用しジンバル・ロックが発生する状態になると、最外ジンバルが急速に180度反転してジンバル・ロックの発生を回避する。この最外ジンバルの180度反転はジンバルフリップと呼ばれる。 H-Iロケット用プラットフォーム型慣性センサ・ユニットで採用された。補足5.3項に概要を示す。
四元数とその仲間たち	四元数 (クォータニオン、 オイラー・ パラメータ)	4	無し	姿勢の回転はオイラー軸ベクトルとその回りの回転角を用いて、1つのスカラー量と1つのベクトル量より成る数として表すことができるので、四元数(クォータニオン)という超複素数の実数部にスカラー量を、3種の虚数単位から成る虚数部にベクトル量を対比させ、その四元数の4つの実係数を求める方法である。
	ギブス・ベクター	3	有り	四元数の実数部が常に1となるように変形した方法で、オイラー軸回りの回転角が±180度の位置に特異点がある。宇宙科学研究所のM-III S2型ロケットの姿勢基準装置に採用され、J-Iロケットではそれを引き継いで使用した。
	ケーリー・クライン (ケーリー数)	4 (複素数)	無し	2行2列の4個のマトリクスが四元数の実数部と超複素数に対応して演算規則を実現しており、それらマトリクスの4つの要素は1と0と通常の複素数 <i>i</i> で構成されている。4個のマトリクスの実係数は四元数の実係数に対応し、計算は複素数演算で行う。

3.2 方向余弦マトリクス

(1) 方向余弦マトリクスの微係数

慣性座標系Iを(o-x, y, z)、回転座標系Bを(o-x_B, y_B, z_B)とし、慣性座標系Iから見た回転座標系Bの方向余弦マトリクスは式(1.1-11)に示したように、下記で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_B^I &= (\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z})^T \cdot (\underline{x}_B \ \underline{y}_B \ \underline{z}_B) = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \cdot \underline{x} & \underline{y}_B \cdot \underline{x} & \underline{z}_B \cdot \underline{x} \\ \underline{x}_B \cdot \underline{y} & \underline{y}_B \cdot \underline{y} & \underline{z}_B \cdot \underline{y} \\ \underline{x}_B \cdot \underline{z} & \underline{y}_B \cdot \underline{z} & \underline{z}_B \cdot \underline{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{x}_{B_x} & \underline{y}_{B_x} & \underline{z}_{B_x} \\ \underline{x}_{B_y} & \underline{y}_{B_y} & \underline{z}_{B_y} \\ \underline{x}_{B_z} & \underline{y}_{B_z} & \underline{z}_{B_z} \end{pmatrix} = (\underline{x}_B^I \ \underline{y}_B^I \ \underline{z}_B^I) = (\underline{x}_B \ \underline{y}_B \ \underline{z}_B) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.2-1) \end{aligned}$$

また、慣性座標系に対する回転座標系の回転角速度は次式で表される。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B \dots\dots\dots(3.2-2)$$

このとき、回転座標系の各軸ベクトルの微係数は、コリオリの表記を用いて次式で表される。ここで、回転座標系から見た回転座標系軸ベクトルの微係数はゼロである。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}}_B &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{x}_B + (\dot{\underline{x}}_B)^B = \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{x}_B = \omega_{z_B} \underline{y}_B - \omega_{y_B} \underline{z}_B \\ \dot{\underline{y}}_B &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{y}_B + (\dot{\underline{y}}_B)^B = \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{y}_B = \omega_{x_B} \underline{z}_B - \omega_{z_B} \underline{x}_B \\ \dot{\underline{z}}_B &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{z}_B + (\dot{\underline{z}}_B)^B = \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{z}_B = \omega_{y_B} \underline{x}_B - \omega_{x_B} \underline{y}_B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.2-3)$$

これらをまとめると、方向余弦マトリクスの微係数は下記のように表される。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\underline{x}}_B & \dot{\underline{y}}_B & \dot{\underline{z}}_B \end{pmatrix} &= (\underline{x}_B \ \underline{y}_B \ \underline{z}_B) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{z_B} & \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} & 0 & -\omega_{x_B} \\ -\omega_{y_B} & \omega_{x_B} & 0 \end{pmatrix} = (\underline{x}_B \ \underline{y}_B \ \underline{z}_B) \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times] \\ \dot{\mathbf{D}}_B^I &= \mathbf{D}_B^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times] \dots\dots\dots(3.2-4) \end{aligned}$$

(2) 角度増分に基づく方向余弦マトリクスの更新

一般に、微分可能な関数は、次のようなテーラー級数に展開できる。

$$f(x) = f_{(x-h)} + hf'_{(x-h)} + \frac{h^2}{2!} f''_{(x-h)} + \frac{h^3}{3!} f'''_{(x-h)} + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}_{(x-h)} \dots\dots\dots(3.2-5)$$

ここで $\boldsymbol{\omega}_B$ 一定と見なせる微小時間における方向余弦マトリクスのn次微分は、式(3.2-4)より次のように表される。

$$\frac{d^n}{dt^n} (\mathbf{D}_B^I) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (\mathbf{D}_B^I) \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times] = \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} (\mathbf{D}_B^I) \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times]^2 = \dots = \mathbf{D}_B^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times]^n \dots\dots\dots(3.2-6)$$

よって、微小時間を ΔT 、現時点をk、現時点より ΔT 前の時点をもk-1としたとき、方向余弦マトリクスは次のテーラー級数で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{B,k}^I &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I + \Delta T \dot{\mathbf{D}}_{B,k-1}^I + \frac{\Delta T^2}{2!} \ddot{\mathbf{D}}_{B,k-1}^I + \frac{\Delta T^3}{3!} \overset{\cdot}{\mathbf{D}}_{B,k-1}^I + \dots + \frac{\Delta T^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (\mathbf{D}_B^I)_{k-1} + \dots \\ &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I + \Delta T \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times] + \frac{\Delta T^2}{2!} \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]^2 + \dots + \frac{\Delta T^n}{n!} \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]^n + \dots \\ &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \left(\mathbf{1} + \Delta T [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times] + \frac{\Delta T^2}{2!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]^2 + \dots + \frac{\Delta T^n}{n!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]^n + \dots \right) \\ &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot e^{\Delta T [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]} \dots\dots\dots(3.2-7) \end{aligned}$$

ここでマトリクス指数関数 $e^{\Delta T [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]}$ は推移マトリクスと呼ばれ、k-1時点からk時点までの ΔT 間の推移を表している。

座標系を順番に回転させて得られる方向余弦マトリクスは式(1.2-18)に示したように、次のように表される。

$$\mathbf{D}_{B,k}^I = \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \mathbf{D}_{B,k}^{B,k-1} \dots\dots\dots(3.2-8)$$

ここで $\mathbf{D}_{B,k}^{B,k-1}$ は式(3.2-7)の推移マトリクスと同じで、 $k-1$ 時点から k 時点までの ΔT 間の回転座標系Bの回転を表しており、その回転ベクトルは次式で表される。

$$\Delta\theta = \begin{pmatrix} \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.2-9)$$

また、 $\mathbf{D}_{B,k}^{B,k-1}$ は座標系(B,k-1)を基準の座標系としたときの座標系(B,k)の方向余弦マトリクスであって、上記の回転ベクトルで式(2.2-11)のように表されるので、回転後の方向余弦マトリクスは下記となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{B,k}^I &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \begin{pmatrix} c + \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_x^2 & \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_y \Delta\theta_x - \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_z & \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_z \Delta\theta_x + \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_y \\ \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_x \Delta\theta_y + \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_z & c + \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_y^2 & \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_z \Delta\theta_y - \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_x \\ \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_x \Delta\theta_z - \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_y & \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_y \Delta\theta_z + \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_x & c + \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_z^2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \begin{pmatrix} c + c_n \Delta\theta_x^2 & c_n \Delta\theta_y \Delta\theta_x - s_n \Delta\theta_z & c_n \Delta\theta_z \Delta\theta_x + s_n \Delta\theta_y \\ c_n \Delta\theta_x \Delta\theta_y + s_n \Delta\theta_z & c + c_n \Delta\theta_y^2 & c_n \Delta\theta_z \Delta\theta_y - s_n \Delta\theta_x \\ c_n \Delta\theta_x \Delta\theta_z - s_n \Delta\theta_y & c_n \Delta\theta_y \Delta\theta_z + s_n \Delta\theta_x & c + c_n \Delta\theta_z^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.2-10) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta\theta = |\Delta\theta| = \sqrt{\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2}$

$$c = \cos \Delta\theta$$

$$s_n = \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \dots\dots\dots(3.2-11)$$

$$c_n = \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\Delta\theta^2} \dots\dots\dots(3.2-12)$$

3.3 オイラー角

オイラー角による姿勢計算は、一般には3ジンバルオイラー角が用いられる。H-Iロケットにおいては、3ジンバルオイラー角が有する特異点(ジンバルロックと称される)を回避できる4ジンバルオイラー角の慣性センサ装置が採用された。4ジンバルオイラー角については補足5.3項で概説する。

(1) 方向余弦マトリクスとオイラー角

慣性座標系Iを(o-x, y, z)、回転座標系Bを(o-x_B, y_B, z_B)としたとき、座標系Iをx軸周りに角度 θ₁回転させ、新しくできた座標系(o-x, y', z')のy'軸周りに角度 θ₂回転させ、さらに新しくできた座標系(o-x'', y', z'')のz''軸周りに角度 θ₃回転させてできた座標系を座標系Bとすると、座標系Iから見た座標系Bの方向余弦マトリクスは1.2-(4)項に示したように、下記で表される。

$$\begin{pmatrix} x_B & y_B & z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_1 \cdot [\theta_2]_2 \cdot [\theta_3]_3 \cdots (3.3-1)$$

$$\mathbf{D}_B^I \equiv \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x_B & y_B & z_B \end{pmatrix} = [\theta_1]_1 \cdot [\theta_2]_2 \cdot [\theta_3]_3 \cdots (3.3-2)$$

このように、2つの座標系の関係を3回の回転で表したとき、この3つの角度はオイラー角と呼ばれる。

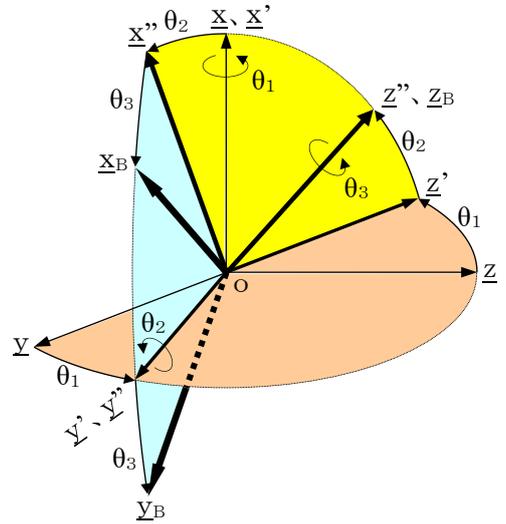


図3.3-1 オイラー角

上記の回転の順序は任意に選べるから、一般的には方向余弦マトリクスはオイラー角を用いて下記で表される。

$$\mathbf{D}_B^I \equiv \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdots (3.3-3)$$

ここでi, j, kは何番目の座標軸で回転させるかを表し、それぞれ1, 2, 3の何れかを示す。

それらの組み合わせは、隣同士が異なるものが3×2×2=12通りあり、式(3.3-3)を展開するとオイラー角から方向余弦マトリクスへの変換式が得られ、それらを表3.3-1に示す。

また、逆方向に、方向余弦マトリクスからオイラー角への変換は、表3.3-1の方向余弦マトリクスから回転順のオイラー角として表3.3-2のように求められる。回転順のオイラー角を座標軸順に並べ替えたオイラー角は表3.3-3のように求められる。なお、ここでは慣性座標系I(o-x, y, z)を基準として回転座標系B(o-x_B, y_B, z_B)への回転を表すオイラー角としているが、任意の基準座標系と任意の回転座標系に読み替えても良い。

表3.3-1 オイラー角から方向余弦マトリクスへの変換

No.	i, j, k	方向余弦マトリクス $\mathbf{D}_B^I = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k$		
1	1, 2, 3	$c\theta_2 c\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$ $-c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$	$-c\theta_2 s\theta_3$ $-s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_2$ $-s\theta_1 c\theta_2$ $c\theta_1 c\theta_2$
2	2, 3, 1	$c\theta_1 c\theta_2$ $s\theta_2$ $-s\theta_1 c\theta_2$	$-c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_2 c\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$ $-c\theta_2 s\theta_3$ $-s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
3	3, 1, 2	$-s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$ $-c\theta_2 s\theta_3$	$-c\theta_2 s\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2$ $s\theta_2$	$s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$ $-c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_2 c\theta_3$
4	3, 2, 1	$c\theta_1 c\theta_2$ $s\theta_1 c\theta_2$ $-s\theta_2$	$c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_2 s\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_2 c\theta_3$
5	1, 3, 2	$c\theta_2 c\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$	$-s\theta_2$ $c\theta_1 c\theta_2$ $s\theta_1 c\theta_2$	$c\theta_2 s\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
6	2, 1, 3	$s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_2 s\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_2 c\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$	$s\theta_1 c\theta_2$ $-s\theta_2$ $c\theta_1 c\theta_2$
7	1, 2, 1	$c\theta_2$ $s\theta_1 s\theta_2$ $-c\theta_1 s\theta_2$	$s\theta_2 s\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_2 c\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$
8	2, 3, 2	$c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_2 c\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$	$-c\theta_1 s\theta_2$ $c\theta_2$ $s\theta_1 s\theta_2$	$c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_2 s\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
9	3, 1, 3	$-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_2 s\theta_3$	$-s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_2 c\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2$ $-c\theta_1 s\theta_2$ $c\theta_2$
10	3, 2, 3	$c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$ $-s\theta_2 c\theta_3$	$-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_2 s\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2$ $s\theta_1 s\theta_2$ $c\theta_2$
11	1, 3, 1	$c\theta_2$ $c\theta_1 s\theta_2$ $s\theta_1 s\theta_2$	$-s\theta_2 c\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$	$s\theta_2 s\theta_3$ $-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
12	2, 1, 2	$-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_2 s\theta_3$ $-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2$ $c\theta_2$ $c\theta_1 s\theta_2$	$s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$ $-s\theta_2 c\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$

(注) $s\theta_n = \sin \theta_n$ 、 $c\theta_n = \cos \theta_n$ であり、n は何回目の回転角かを示す。

表3.3-2 方向余弦から回転順のオイラー角への変換

回転順のオイラー角 $D_B^L = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k$				
No.	i, j, k	θ_1	θ_2	θ_3
1	1, 2, 3	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{33})$	$\sin^{-1}(d_{13})$	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{11})$
2	2, 3, 1	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{11})$	$\sin^{-1}(d_{21})$	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{22})$
3	3, 1, 2	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{22})$	$\sin^{-1}(d_{32})$	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{33})$
4	3, 2, 1	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{11})$	$\sin^{-1}(-d_{31})$	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{33})$
5	1, 3, 2	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{22})$	$\sin^{-1}(-d_{12})$	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{11})$
6	2, 1, 3	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{33})$	$\sin^{-1}(-d_{23})$	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{22})$
7	1, 2, 1	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{31})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{13})$
8	2, 3, 2	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{12})$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{21})$
9	3, 1, 3	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{23})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{32})$
10	3, 2, 3	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{13})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{31})$
11	1, 3, 1	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{21})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{12})$
12	2, 1, 2	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{32})$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{23})$

表3.3-3 方向余弦から座標軸順のオイラー角への変換

座標軸順のオイラー角					
No.	i, j, k	表3.3-2の角度	第1軸周り	第2軸周り	第3軸周り
1	1, 2, 3	$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{33})$	$\sin^{-1}(d_{13})$	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{11})$
2	2, 3, 1	$\theta_3, \theta_1, \theta_2$	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{22})$	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{11})$	$\sin^{-1}(d_{21})$
3	3, 1, 2	$\theta_2, \theta_3, \theta_1$	$\sin^{-1}(d_{32})$	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{33})$	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{22})$
4	3, 2, 1	$\theta_3, \theta_2, \theta_1$	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{33})$	$\sin^{-1}(-d_{31})$	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{11})$
5	1, 3, 2	$\theta_1, \theta_3, \theta_2$	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{11})$	$\sin^{-1}(-d_{12})$
6	2, 1, 3	$\theta_2, \theta_1, \theta_3$	$\sin^{-1}(-d_{23})$	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{22})$
No.	i, j, k	表3.3-2の角度	以下は座標軸順ではない		
7	1, 2, 1	$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{31})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{13})$
8	2, 3, 2	$\theta_3, \theta_1, \theta_2$	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{21})$	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{12})$	$\cos^{-1}(d_{22})$
9	3, 1, 3	$\theta_2, \theta_3, \theta_1$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{32})$	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{23})$
10	3, 2, 3	$\theta_3, \theta_2, \theta_1$	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{31})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{13})$
11	1, 3, 1	$\theta_1, \theta_3, \theta_2$	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{21})$	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{12})$	$\cos^{-1}(d_{11})$
12	2, 1, 2	$\theta_2, \theta_1, \theta_3$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{32})$	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{23})$

(注) No.7~12 は座標軸順ではない。

(2) オイラー角の微係数

慣性座標系に対する回転座標系の回転角速度を次式で表す。

$$\omega_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B \dots\dots\dots (3.3-4)$$

このとき、式(3.3-3)の回転軸i, j, kの各軸(図3.3-1に示した例では、それぞれx軸、y'軸、z''軸)周りの回転角速度がオイラー角の微係数であり、これらを順次求める。

第1回目の回転は下記のように表される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}' \\ \underline{y}' \\ \underline{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i$$

この回転による角速度は、回転後の座標系で下記のように回転軸成分を取り出して表される。

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ \underline{y}' \\ \underline{z}' \end{pmatrix} \cdot \underline{\delta}_i = \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i \quad \dots\dots\dots (3.3-5)$$

$$\text{ここで、} \underline{\delta}_i = \begin{cases} (1 & 0 & 0)^T & :i=1の時 \\ (0 & 1 & 0)^T & :i=2の時 \\ (0 & 0 & 1)^T & :i=3の時 \end{cases}$$

同様に、第2回目の回転は下記のように表される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}'' \\ \underline{y}'' \\ \underline{z}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}' \\ \underline{y}' \\ \underline{z}' \end{pmatrix} \cdot [\theta_2]_j = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} \underline{x}'' \\ \underline{y}'' \\ \underline{z}'' \end{pmatrix} \cdot \underline{\delta}_j = \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j \quad \dots\dots\dots (3.3-6)$$

第3回目の回転も同様にして、下記のように表される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{y}_B \\ \underline{z}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}'' \\ \underline{y}'' \\ \underline{z}'' \end{pmatrix} \cdot [\theta_3]_k = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{y}_B \\ \underline{z}_B \end{pmatrix} \cdot \underline{\delta}_k = \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k \quad \dots\dots\dots (3.3-7)$$

上記の角速度の合計が回転座標系の回転角速度となり、下記のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_B &= \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 \\ &= \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i \\ &\quad + \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j \\ &\quad + \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k \quad \dots\dots\dots (3.3-8) \end{aligned}$$

よって、この式と(3.3-4)式を等値して

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot (\dot{\theta}_1 [\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i + \dot{\theta}_2 [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j + \dot{\theta}_3 [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k) \\ = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B \quad \dots\dots\dots (3.3-9) \end{aligned}$$

上式を書き直して整理すると

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i & [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j & [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{y}_B \\ \underline{z}_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix}$$

ここで式(3.3-1)を一般化した $\begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{y}_B \\ \underline{z}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k$ を代入して、

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i & [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j & [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i & [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j & [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} [\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i & [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j & [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [-\theta_3]_k \cdot [-\theta_2]_j \cdot [-\theta_1]_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i & [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j & [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [-\theta_3]_k \cdot [-\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_i & [-\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_j & \underline{\delta}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.3-10)$$

従って、オイラー角の微係数は上式から、下記のように表される。

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-\theta_3]_k \cdot [-\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_i & [-\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_j & \underline{\delta}_k \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.3-11)$$

上記の回転座標系の回転角速度からオイラー角微係数への変換マトリクスは、表3.3-4の通りである。

表3.3-4 オイラー角微係数への変換マトリクス

No.	i, j, k	微係数	オイラー角微係数への変換マトリクス		
			ω_{x_B}	ω_{y_B}	ω_{z_B}
1	1, 2, 3	$\dot{\theta}_1$	$c\theta_3 / c\theta_2$	$-s\theta_3 / c\theta_2$	0
		$\dot{\theta}_2$	$s\theta_3$	$c\theta_3$	0
		$\dot{\theta}_3$	$-s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$	1
2	2, 3, 1	$\dot{\theta}_1$	0	$c\theta_3 / c\theta_2$	$-s\theta_3 / c\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	0	$s\theta_3$	$c\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	1	$-s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$
3	3, 1, 2	$\dot{\theta}_1$	$-s\theta_3 / c\theta_2$	0	$c\theta_3 / c\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	$c\theta_3$	0	$s\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$	1	$-s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$
4	3, 2, 1	$\dot{\theta}_1$	0	$s\theta_3 / c\theta_2$	$c\theta_3 / c\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	0	$c\theta_3$	$-s\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	1	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$	$s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$
5	1, 3, 2	$\dot{\theta}_1$	$c\theta_3 / c\theta_2$	0	$s\theta_3 / c\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	$-s\theta_3$	0	$c\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	$s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$	1	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$
6	2, 1, 3	$\dot{\theta}_1$	$s\theta_3 / c\theta_2$	$c\theta_3 / c\theta_2$	0
		$\dot{\theta}_2$	$c\theta_3$	$-s\theta_3$	0
		$\dot{\theta}_3$	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$	$s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$	1
7	1, 2, 1	$\dot{\theta}_1$	0	$s\theta_3 / s\theta_2$	$c\theta_3 / s\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	0	$c\theta_3$	$-s\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	1	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$	$-c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$
8	2, 3, 2	$\dot{\theta}_1$	$c\theta_3 / s\theta_2$	0	$s\theta_3 / s\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	$-s\theta_3$	0	$c\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	$-c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$	1	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$
9	3, 1, 3	$\dot{\theta}_1$	$s\theta_3 / s\theta_2$	$c\theta_3 / s\theta_2$	0
		$\dot{\theta}_2$	$c\theta_3$	$-s\theta_3$	0
		$\dot{\theta}_3$	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$	$-c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$	1
10	3, 2, 3	$\dot{\theta}_1$	$-c\theta_3 / s\theta_2$	$s\theta_3 / s\theta_2$	0
		$\dot{\theta}_2$	$s\theta_3$	$c\theta_3$	0
		$\dot{\theta}_3$	$c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$	1
11	1, 3, 1	$\dot{\theta}_1$	0	$-c\theta_3 / s\theta_2$	$s\theta_3 / s\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	0	$s\theta_3$	$c\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	1	$c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$
12	2, 1, 2	$\dot{\theta}_1$	$s\theta_3 / s\theta_2$	0	$-c\theta_3 / s\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	$c\theta_3$	0	$s\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$	1	$c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$

(注) $s\theta_n = \sin \theta_n$ 、 $c\theta_n = \cos \theta_n$ であり、n は何回目の回転角かを示す。

3.4 四元数(クォータニオン)

(1) 四元数

四元数は、一つの実数と3種類の虚数から成る超複素数で、次のように表される。

$$\mathbf{Q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \dots\dots\dots(3.4-1)$$

ここで q_0, q_1, q_2, q_3 は実係数で、オイラーパラメータと呼ばれる。

この3種類の虚数単位は下記の乗算規則に従う。

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{i} * \mathbf{i} = \mathbf{i}^2 = -1, \quad \mathbf{i} * \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{i} * \mathbf{k} = -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} * \mathbf{j} = \mathbf{j}^2 = -1, \quad \mathbf{j} * \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j} * \mathbf{i} = -\mathbf{k} \\ \mathbf{k} * \mathbf{k} = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{k} * \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k} * \mathbf{j} = -\mathbf{i} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(3.4-2)$$

このような演算規則に従う虚数単位は下記のマトリクスで表すことができる。このマトリクスを用いたのがケーリー一数で、複素数演算を伴うので姿勢表現には適さないが、参考に示す。

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(3.4-3)$$

ここで、 i : 通常の虚数単位 $\sqrt{-1}$

四元数の虚数単位は式(3.4-2)に示したように、3つが互いに直交した基底ベクトルの性質を持っているので、2.2項の式(2.2-8)に示したオイラー軸ベクトルを下記のように表し、

$$\underline{\mathbf{e}} = e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}$$

これを四元数の虚数部に対応させて、オイラー軸周りの回転角 θ を用いて式(3.4-1)を次のように表せば、四元数で座標系の回転を表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \underline{\mathbf{e}} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} e_1\mathbf{i} + \sin \frac{\theta}{2} e_2\mathbf{j} + \sin \frac{\theta}{2} e_3\mathbf{k} \\ &= q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \dots\dots\dots(3.4-4) \end{aligned}$$

ここで、 $q_0 = \cos \frac{\theta}{2}$ 、 $q_1 = \sin \frac{\theta}{2} e_1$ 、 $q_2 = \sin \frac{\theta}{2} e_2$ 、 $q_3 = \sin \frac{\theta}{2} e_3$

(2) 四元数の演算

四元数同志の乗算は下記で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \cos \frac{\theta_1}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} \underline{\mathbf{e}}_1 = c_1 + s_1 \underline{\mathbf{e}}_1, & \underline{\mathbf{e}}_1 &= e_{1i}\mathbf{i} + e_{1j}\mathbf{j} + e_{1k}\mathbf{k} \\ \mathbf{Q}_2 &= \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2} \underline{\mathbf{e}}_2 = c_2 + s_2 \underline{\mathbf{e}}_2, & \underline{\mathbf{e}}_2 &= e_{2i}\mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{k} \text{ としたとき} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 * \mathbf{Q}_2 &= (c_1 + s_1 \underline{\mathbf{e}}_1) * (c_2 + s_2 \underline{\mathbf{e}}_2) \\ &= \{c_1 + s_1(e_{1i}\mathbf{i} + e_{1j}\mathbf{j} + e_{1k}\mathbf{k})\} * \{c_2 + s_2(e_{2i}\mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{k})\} \\ &= c_1c_2 + s_1c_2(e_{1i}\mathbf{i} + e_{1j}\mathbf{j} + e_{1k}\mathbf{k}) + c_1s_2(e_{2i}\mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{k}) \\ &\quad + s_1s_2(e_{1i}\mathbf{i} + e_{1j}\mathbf{j} + e_{1k}\mathbf{k}) * (e_{2i}\mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{k}) \\ &= c_1c_2 + s_1c_2(e_{1i}\mathbf{i} + e_{1j}\mathbf{j} + e_{1k}\mathbf{k}) + c_1s_2(e_{2i}\mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{k}) \\ &\quad + s_1s_2\{e_{1i}(e_{2i}\mathbf{i} * \mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{i} * \mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{i} * \mathbf{k}) + e_{1j}(e_{2i}\mathbf{j} * \mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{j} * \mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{j} * \mathbf{k}) \\ &\quad + e_{1k}(e_{2i}\mathbf{k} * \mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{k} * \mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{k} * \mathbf{k})\} \\ &= c_1c_2 + s_1c_2(e_{1i}\mathbf{i} + e_{1j}\mathbf{j} + e_{1k}\mathbf{k}) + c_1s_2(e_{2i}\mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{k}) \\ &\quad + s_1s_2\{e_{1i}(-e_{2i} + e_{2j}\mathbf{k} - e_{2k}\mathbf{j}) + e_{1j}(-e_{2i}\mathbf{k} - e_{2j} + e_{2k}\mathbf{i}) + e_{1k}(e_{2i}\mathbf{j} - e_{2j}\mathbf{i} - e_{2k})\} \end{aligned}$$

$$= c_1c_2 + s_1c_2(e_{1i}\mathbf{i} + e_{1j}\mathbf{j} + e_{1k}\mathbf{k}) + c_1s_2(e_{2i}\mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{k}) - s_1s_2(e_{1i}e_{2i} + e_{1j}e_{2j} + e_{1k}e_{2k}) + s_1s_2\{(e_{1j}e_{2k} - e_{1k}e_{2j})\mathbf{i} + (e_{1k}e_{2i} - e_{1i}e_{2k})\mathbf{j} + (e_{1i}e_{2j} - e_{1j}e_{2i})\mathbf{k}\}$$

この式はオイラー軸ベクトルのベクトル演算で内積(演算記号 \cdot)と外積(演算記号 \times)を用いて、下記のように書き換えることができる。

$$\mathbf{Q}_1 * \mathbf{Q}_2 = c_1c_2 + s_1c_2\mathbf{e}_1 + c_1s_2\mathbf{e}_2 - s_1s_2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + s_1s_2(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)$$

よって、虚数部をベクトルで表現した四元数の乗算は、新しい演算記号 \otimes を用いて、下記のように表現される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 \otimes \mathbf{Q}_2 &= (c_1 + s_1\mathbf{e}_1) \otimes (c_2 + s_2\mathbf{e}_2) \\ &= c_1c_2 + s_1c_2\mathbf{e}_1 + c_1s_2\mathbf{e}_2 + s_1s_2(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & -s_1\mathbf{e}_1 \\ s_1\mathbf{e}_1 & c_1\mathbf{1} + s_1[\mathbf{e}_1 \times] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ s_2\mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.4-5) \end{aligned}$$

このように、四元数はスカラー部とベクトル部で構成されるものとして、ベクトル演算で扱うことができる。

(3) 共役四元数

四元数のベクトル部の符号を反転させることは、オイラー軸の符号が反転して回転の方向を反対にするこ
ととなる。これを共役四元数と呼び、下記のように表される。

$$\mathbf{Q}^* = \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{e} = c - s\mathbf{e} \dots\dots\dots (3.4-6)$$

四元数とその共役四元数の関係は、方向余弦マトリクスとその転置マトリクス(および逆マトリクス)の関係に対
応し、四元数とその共役四元数の乗算は、下記のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}^* &= (c + s\mathbf{e}) \otimes (c - s\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} c & -s\mathbf{e} \\ s\mathbf{e} & c\mathbf{1} + s[\mathbf{e} \times] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ -s\mathbf{e} \end{pmatrix} \\ &= c^2 + c s\mathbf{e} + s^2(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) - c s\mathbf{e} - s^2(\mathbf{e} \times \mathbf{e}) = \mathbf{1} \dots\dots\dots (3.4-7) \end{aligned}$$

よって、共役四元数は逆四元数ということもできる。

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^{-1} \dots\dots\dots (3.4-8)$$

(4) 四元数によるベクトルの回転

ベクトルはスカラー部がゼロの四元数として扱い、下記のように乗算できる。

$$\mathbf{Q} \otimes \mathbf{a} = (c + s\mathbf{e}) \otimes (0 + \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} c & -s\mathbf{e} \\ s\mathbf{e} & c\mathbf{1} + s[\mathbf{e} \times] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = -s(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) + c\mathbf{a} + s(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \dots\dots\dots (3.4-9)$$

四元数を用いたベクトルの回転は、下記のように表現される。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \mathbf{Q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{Q}^* \dots\dots\dots (3.4-10) \\ &= \begin{pmatrix} c & -s\mathbf{e} \\ s\mathbf{e} & c\mathbf{1} + s[\mathbf{e} \times] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{Q}^* = \{-s(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) + c\mathbf{a} + s(\mathbf{e} \times \mathbf{a})\} \otimes \mathbf{Q}^* \\ &= \begin{pmatrix} -s(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) & -c\mathbf{a} - s(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \\ c\mathbf{a} + s(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) & -s(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\mathbf{1} + \{c[\mathbf{a} \times] + s[(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times]\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ -s\mathbf{e} \end{pmatrix} \\ &= \{-sc(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) + sc(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) + s^2(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}\} + c^2\mathbf{a} + sc(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) + s^2(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\mathbf{e} - sc(\mathbf{a} \times \mathbf{e}) - s^2(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e} \end{aligned}$$

ここで、

ベクトル3重積 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ より $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})\mathbf{a} - \mathbf{e} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{e}) = \mathbf{a} + \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a})$ 、
スカラー3重積 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ より $(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{e} \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{a} = 0$ であるから、これらを代入して整
理すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= c^2\mathbf{a} + 2sc(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) + s^2\{\mathbf{a} + \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a})\} + s^2\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a} + 2sc(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) + 2s^2\{\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a})\} \\ &= \{1 + 2sc[\mathbf{e} \times] + 2s^2[\mathbf{e} \times]^2\} \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

$$= \left\{ 1 + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times] + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \mathbf{a} \dots\dots\dots(3.4-11)$$

この式に $2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \sin \theta$ および $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$ を代入すると、

式(3.4-11)はロドリゲスの回転公式(2.1-3)と同じことが分かる。

$$\mathbf{a}' = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \mathbf{a}$$

四元数によるベクトルの回転の式は式(1.2-3)に示したように、ある回転軸の周りにおける角度だけ単一の回転マトリクスで回転する式に相当し、次のように表される。

$$\mathbf{a}' = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{Q}(\theta, \underline{e}) \cdot \mathbf{a} \dots\dots\dots(3.4-12)$$

上記の式(3.4-11)を $\sin \frac{\theta}{2} = s$ 、 $\cos \frac{\theta}{2} = c$ および $q_0 = c$ 、 $q_1 = se_i$ 、 $q_2 = se_j$ 、 $q_3 = se_k$ を用いてマトリクス形式に表現して書き直すと、

$$\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} 1 + 2s^2(-e_j^2 - e_k^2) & 2s^2e_j e_i - 2s c e_k & 2s^2e_k e_i + 2s c e_j \\ 2s^2e_i e_j + 2s c e_k & 1 + 2s^2(-e_k^2 - e_i^2) & 2s^2e_k e_j - 2s c e_i \\ 2s^2e_i e_k - 2s c e_j & 2s^2e_j e_k + 2s c e_i & 1 + 2s^2(-e_i^2 - e_j^2) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } 1 + 2s^2(-e_j^2 - e_k^2) &= 1 + s^2(-e_j^2 - e_k^2) + s^2(-e_j^2 - e_k^2) \\ &= 1 + s^2(e_i^2 - 1) + s^2(-e_j^2 - e_k^2) = 1 - s^2 + s^2e_i^2 + s^2(-e_j^2 - e_k^2) \\ &= c^2 + s^2(e_i^2 - e_j^2 - e_k^2) \end{aligned}$$

であり、他の2つの対角要素も同様に表せるから

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \begin{pmatrix} c^2 + s^2(e_i^2 - e_j^2 - e_k^2) & 2s^2e_j e_i - 2s c e_k & 2s^2e_k e_i + 2s c e_j \\ 2s^2e_i e_j + 2s c e_k & c^2 + s^2(e_j^2 - e_k^2 - e_i^2) & 2s^2e_k e_j - 2s c e_i \\ 2s^2e_i e_k - 2s c e_j & 2s^2e_j e_k + 2s c e_i & c^2 + s^2(e_k^2 - e_i^2 - e_j^2) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a} \\ &= \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_1 - q_0q_3) & 2(q_3q_1 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_3q_2 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a} \dots\dots\dots(3.4-13) \end{aligned}$$

(5) 方向余弦マトリクスから四元数への変換

回転体の姿勢は方向余弦マトリクスで表すのが簡単で、オイラー角による座標系の回転の式(1.2-20)に示したように、基準とする座標系を順次回転して回転体の姿勢を表す回転座標系の方向余弦マトリクスを求め、四元数との対比から下記のように四元数を求めることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_B^I &\equiv \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_1 - q_0q_3) & 2(q_3q_1 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_3q_2 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \\ \left. \begin{aligned} q_0 &= \frac{\sqrt{d_{11} + d_{22} + d_{33} + 1}}{2} \\ q_1 &= \frac{d_{32} - d_{23}}{4q_0} \\ q_2 &= \frac{d_{13} - d_{31}}{4q_0} \\ q_3 &= \frac{d_{21} - d_{12}}{4q_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.4-14) \end{aligned}$$

(6) 四元数の合成

式(3.4-12)に示したように、四元数は1.2(2)項の単一の回転マトリクスに対応するが、複数の回転マトリクスをオイラー角順あるいは固定角順に合成した回転マトリクスに対応した四元数が考えられ、下記の3種類の体(非可換体)が考えられる。

(1) $\mathbf{Q}_Z^A = \mathbf{Q}_B^A(\theta_1, \underline{e}_1) \otimes \mathbf{Q}_C^B(\theta_2, \underline{e}_2) \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_Z^Y(\theta_n, \underline{e}_n)$: オイラー角型四元数

上記は座標系の回転およびベクトルの座標変換に利用できる。

(2) $(\mathbf{Q}_Z^A)^I = \mathbf{Q}_Z^I \otimes \mathbf{Q}_A^{I*}$: 固定角型四元数

上記は座標系の回転およびベクトルの回転に利用できる。

(3) $(\mathbf{Q}_Z^A) = \mathbf{Q}_Z^Y(\theta_n, \underline{e}_n) \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_C^B(\theta_2, \underline{e}_2) \otimes \mathbf{Q}_B^A(\theta_1, \underline{e}_1)$: 固定角順四元数

上記はベクトルの座標変換および回転に利用できる。

(7) 四元数の微係数

慣性座標系に対する回転座標系Bの回転角速度及びオイラー軸ベクトルを次のように表す。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-15)$$

$$\underline{e} = e_{x_B} \underline{x}_B + e_{y_B} \underline{y}_B + e_{z_B} \underline{z}_B \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-16)$$

また、オイラー軸ベクトル及びその周りの回転角の微係数は式(2.2-18)及び式(2.2-19)を書き直して、それぞれ下記のように表す。

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= \frac{1}{2} \{ [\underline{e} \times] - \cot \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times]^2 \} \cdot \boldsymbol{\omega}_B = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \{ \sin \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times] - \cos \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times]^2 \} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (e_{y_B}^2 + e_{z_B}^2) & -\cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} e_{x_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} & -\cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} e_{x_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} e_{y_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} & \cos \frac{\theta}{2} (e_{z_B}^2 + e_{x_B}^2) & -\cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} e_{y_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} e_{z_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} & -\cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} e_{z_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} & \cos \frac{\theta}{2} (e_{x_B}^2 + e_{y_B}^2) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \quad \cdots (3.4-17) \end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = \boldsymbol{\omega}_B \cdot \underline{e} = \omega_{x_B} e_{x_B} + \omega_{y_B} e_{y_B} + \omega_{z_B} e_{z_B} \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-18)$$

このとき、下記の四元数の実係数を微分して

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad q_1 = \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B}, \quad q_2 = \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B}, \quad q_3 = \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= -\frac{\dot{\theta}}{2} \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} (\omega_{x_B} e_{x_B} + \omega_{y_B} e_{y_B} + \omega_{z_B} e_{z_B}) \\ &= -\frac{1}{2} (\omega_{x_B} q_1 + \omega_{y_B} q_2 + \omega_{z_B} q_3) \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\dot{\theta}}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} + \sin \frac{\theta}{2} \dot{e}_{x_B} \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} (\omega_{x_B} e_{x_B} + \omega_{y_B} e_{y_B} + \omega_{z_B} e_{z_B}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\theta}{2} (e_{y_B}^2 + e_{z_B}^2) \omega_{x_B} - \left(\cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} e_{x_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} \right) \omega_{y_B} - \left(\cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} e_{x_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} \right) \omega_{z_B} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\theta}{2} (e_{x_B}^2 + e_{y_B}^2 + e_{z_B}^2) \omega_{x_B} - \left(\sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} \right) \omega_{y_B} + \left(\sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} \right) \omega_{z_B} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ q_0 \omega_{x_B} - q_3 \omega_{y_B} + q_2 \omega_{z_B} \} \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= \frac{\dot{\theta}}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} + \sin \frac{\theta}{2} \dot{e}_{y_B} \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} (\omega_{x_B} e_{x_B} + \omega_{y_B} e_{y_B} + \omega_{z_B} e_{z_B}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ - \left(\cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} e_{y_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} \right) \omega_{x_B} + \cos \frac{\theta}{2} (e_{z_B}^2 + e_{x_B}^2) \omega_{y_B} - \left(\cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} e_{y_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} \right) \omega_{z_B} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} \right) \omega_{x_B} + \cos \frac{\theta}{2} (e_{x_B}^2 + e_{y_B}^2 + e_{z_B}^2) \omega_{y_B} - \left(\sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} \right) \omega_{z_B} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ q_3 \omega_{x_B} + q_0 \omega_{y_B} - q_1 \omega_{z_B} \} \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_3 &= \frac{\dot{\theta}}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} + \sin \frac{\theta}{2} \dot{e}_{z_B} \\
&= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} (\omega_{x_B} e_{x_B} + \omega_{y_B} e_{y_B} + \omega_{z_B} e_{z_B}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ - \left(\cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} e_{z_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} \right) \omega_{x_B} - \left(\cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} e_{z_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} \right) \omega_{y_B} + \cos \frac{\theta}{2} (e_{x_B}^2 + e_{y_B}^2) \omega_{z_B} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ - \left(\sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} \right) \omega_{x_B} + \left(\sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} \right) \omega_{y_B} + \cos \frac{\theta}{2} (e_{x_B}^2 + e_{y_B}^2 + e_{z_B}^2) \omega_{z_B} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -q_2 \omega_{x_B} + q_1 \omega_{y_B} + q_0 \omega_{z_B} \right\} \dots\dots\dots (3.4-22)
\end{aligned}$$

上記をまとめると、四元数の微係数は下記で表される。

$$\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{x_B} & -\omega_{y_B} & -\omega_{z_B} \\ \omega_{x_B} & 0 & \omega_{z_B} & -\omega_{y_B} \\ \omega_{y_B} & -\omega_{z_B} & 0 & \omega_{x_B} \\ \omega_{z_B} & \omega_{y_B} & -\omega_{x_B} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \dots\dots (3.4-23)$$

(8) 角度増分に基づく四元数の更新

四元数のn次微分は式(3.4-23)より、次のように表される。

$$\frac{d^n}{dt^n} (\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_B \otimes] \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (\mathbf{Q}) = \dots = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_B \otimes]^{n-1} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_B \otimes]^n \cdot \mathbf{Q} \dots\dots\dots (3.4-24)$$

$$\text{ここで、} [\boldsymbol{\omega}_B \otimes] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{x_B} & -\omega_{y_B} & -\omega_{z_B} \\ \omega_{x_B} & 0 & \omega_{z_B} & -\omega_{y_B} \\ \omega_{y_B} & -\omega_{z_B} & 0 & \omega_{x_B} \\ \omega_{z_B} & \omega_{y_B} & -\omega_{x_B} & 0 \end{pmatrix}$$

よって、微小期間を ΔT 、現時点を k 、現時点より ΔT 前の時点が $k-1$ としたとき、四元数は方向余弦マトリクスの場合と同様に、式(3.2-5)に式(3.4-24)を代入して、次のようにテーラー級数で表される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_k &= \mathbf{Q}_{k-1} + \Delta T \dot{\mathbf{Q}}_{k-1} + \frac{\Delta T^2}{2!} \ddot{\mathbf{Q}}_{k-1} + \dots + \frac{\Delta T^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (\mathbf{Q}_{k-1}) + \dots \\
&= \mathbf{Q}_{k-1} + \frac{\Delta T}{2} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes] \cdot \mathbf{Q}_{k-1} + \frac{\Delta T^2}{2^2 2!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]^2 \cdot \mathbf{Q}_{k-1} + \dots + \frac{\Delta T^n}{2^n n!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]^n \cdot \mathbf{Q}_{k-1} + \dots \\
&= \left(1 + \frac{\Delta T}{2} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes] + \frac{\Delta T^2}{2^2 2!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]^2 + \dots + \frac{\Delta T^n}{2^n n!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]^n + \dots \right) \cdot \mathbf{Q}_{k-1} \\
&= e^{\frac{\Delta T}{2} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]} \cdot \mathbf{Q}_{k-1} \dots\dots\dots (3.4-25)
\end{aligned}$$

ここでマトリクス指数関数 $e^{\frac{\Delta T}{2} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]}$ は推移マトリクスと呼ばれ、 $k-1$ 時点から k 時点までの ΔT 間の推移を表している。

慣性座標系 $I(o-x, y, z)$ を基準座標系として、回転座標系 B を $(o-x_B, y_B, z_B)$ としたとき、基準座標系から $k-1$ 時点の回転座標系への回転を示す四元数を $\mathbf{Q}_{B,k-1}^I$ 、 $k-1$ 時点の回転座標系から k 時点の回転座標系への回転を示す四元数を $\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1}$ とすると、基準座標系の座標軸単位ベクトル $(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})$ を k 時点の回転座標系の座標軸単位ベクトル $(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B)$ へ回転させる四元数 $\mathbf{Q}_{B,k}^I$ は、式(3.4-10)より次のように表される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}' &= \mathbf{Q}_{B,k-1}^I \otimes \mathbf{a} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k-1}^I)^* \\
\mathbf{a}'' &= \mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1} \otimes \mathbf{a}' \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1})^* = \mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1} \otimes \{ \mathbf{Q}_{B,k-1}^I \otimes \mathbf{a} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k-1}^I)^* \} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1})^* \\
&= \{ \mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1} \otimes \mathbf{Q}_{B,k-1}^I \} \otimes \mathbf{a} \otimes \{ (\mathbf{Q}_{B,k-1}^I)^* \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1})^* \} = \mathbf{Q}_{B,k}^I \otimes \mathbf{a} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^I)^* \text{より}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_{B,k}^I = \mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1} \otimes \mathbf{Q}_{B,k-1}^I \dots\dots\dots (3.4-26)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_B &= \mathbf{Q}_{B,k}^I \otimes \underline{x} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^I)^* \\ \underline{y}_B &= \mathbf{Q}_{B,k}^I \otimes \underline{y} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^I)^* \\ \underline{z}_B &= \mathbf{Q}_{B,k}^I \otimes \underline{z} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^I)^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.4-27)$$

ここで上記の四元数は何れも基準座標系から見たオイラー軸で定義されているが、 $\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1}$ はk-1時点からk時点までの角度増分を用いて回転座標系で表すのが便利であり、それは下記のように表される。

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1})^{B,k-1} &= \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \sin \frac{\Delta\theta}{2} \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta} \\ &= \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{1}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \Delta\theta \dots\dots\dots (3.4-28) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta\theta \equiv \begin{pmatrix} \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z \end{pmatrix}$: 回転座標系での角度増分

$$\Delta\theta = |\Delta\theta| = \sqrt{\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2}$$

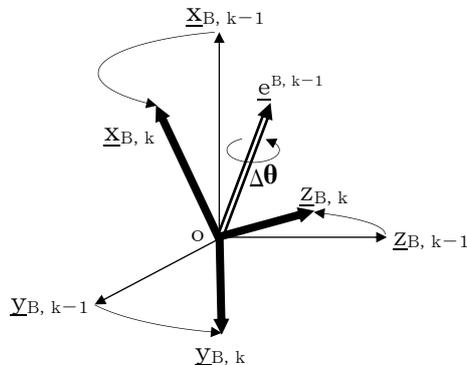


図3.4-1 回転座標系におけるオイラー軸

従って、これを式(3.4-26)および積の式(3.4-5)を用いて表せば、下記のように記述される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{B,k}^I &= (\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1})^{B,k-1} \otimes \mathbf{Q}_{B,k-1}^I \\ &= \begin{pmatrix} q_0 \\ q_0 \\ q_0 \\ q_0 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} c_n & -\Delta\theta_x s_n & -\Delta\theta_y s_n & -\Delta\theta_z s_n \\ \Delta\theta_x s_n & c_n & \Delta\theta_z s_n & -\Delta\theta_y s_n \\ \Delta\theta_y s_n & -\Delta\theta_z s_n & c_n & \Delta\theta_x s_n \\ \Delta\theta_z s_n & \Delta\theta_y s_n & -\Delta\theta_x s_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_0 \\ q_0 \\ q_0 \end{pmatrix}_{k-1} \dots\dots\dots (3.4-29) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{Q}_{B,k}^I = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_0 \\ q_0 \\ q_0 \end{pmatrix}_k$

$$\mathbf{Q}_{B,k-1}^I = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_0 \\ q_0 \\ q_0 \end{pmatrix}_{k-1}$$

$$s_n = \frac{1}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \dots\dots\dots (3.4-30)$$

$$c_n = \cos \frac{\Delta\theta}{2} \dots\dots\dots (3.4-31)$$

(9) ギブス・ベクター

四元数の式(3.4-4)において、全体を実数部で割ってベクトル部のみで表した数はギブス・ベクターと呼ばれ、下記のように表される。

$$\mathbf{Q} = \tan \frac{\theta}{2} \underline{e} = \frac{q_1}{q_0} \mathbf{i} + \frac{q_2}{q_0} \mathbf{j} + \frac{q_3}{q_0} \mathbf{k} = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} \dots\dots\dots (3.4-32)$$

このギブス・ベクターを用いた姿勢計算は、科学衛星打上げ用のMロケットで採用されている。また、H-IIロケットの固体ロケットブースタ(SRB)を1段とし、2段及び3段にM-3SIIロケットのそれらを組合わせた格好で開発されたJ-Iロケットにも、そのまま採用された。上式を見れば分かるように、このパラメータは角度 $\theta = 180^\circ$ に特異点を有しているが、これらロケットは発射してから衛星分離までにそんなに回転することはないので、問題は無い。

(10) ケーリー数

式(3.4-1)の四元数に式(3.4-3)の虚数単位を代入した数はケーリー数と呼ばれ、下記のように通常の複素数を要素とした2行2列のマトリクスで表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + q_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + q_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_0 + q_1i & q_2 + q_3i \\ -q_2 + q_3i & q_0 - q_1i \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.4-33) \end{aligned}$$

このケーリー数を用いて四元数と同様にベクトルの回転を表すことができるが、複素数演算を行わねばならないので、普通は用いられない。

3.5 座標回転の補正 (コーニング補正)

慣性座標系Iを(o-x, y, z)、回転座標系Bを(o-x_B, y_B, z_B)としたとき、回転座標系の回転を表す回転ベクトルは式(2.2-21)に示した回転ベクトルの微係数を積分して下記の式で表される。

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \int \dot{\boldsymbol{\theta}} dt = \int \left[\boldsymbol{\omega}_B + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}_B) + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) \{ \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}_B) \} \right] dt \dots\dots\dots (3.5-1)$$

ここで、 $\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B$: 慣性系に対する回転座標系の回転角速度ベクトル

ところで、ストラップダウン型の慣性航法においては、ジャイロは回転体に固定されているので、常に回転座標系の各軸方向の角速度を積分した下記で表される値を出力する。

$$\boldsymbol{\theta}_B = \begin{pmatrix} \int \omega_{x_B} dt \\ \int \omega_{y_B} dt \\ \int \omega_{z_B} dt \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.5-2)$$

よって、ジャイロで計測できない式(3.5-1)の第2項以降のノンコミュタティビティ・レートは、このジャイロ出力信号を用いて計算によって補正しなければならない。このため、回転座標系が一定と仮定できる微小時間毎に周期的にジャイロ出力信号を読み取り、それを用いて回転座標系の回転角速度 $\boldsymbol{\omega}_B$ を推定して式(3.5-1)の積分値を求める必要がある。この微小時間を Δt とすれば、ジャイロ出力信号は下記で表される。

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{B(T)} = \int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \dots\dots\dots (3.5-3)$$

このとき、回転座標系の角速度は、現時点(T)と Δt 前の時点(T- Δt)の間の平均値として下記で近似される。

$$\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t} \Delta \boldsymbol{\theta}_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-4)$$

また、式(3.5-1)の回転ベクトルの微小時間 Δt 間の積分は次式で表される。

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{(T)} = \int_{T-\Delta t}^T \left[\boldsymbol{\omega}_{B(t)} + \frac{1}{2}(\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(t)}) + \frac{1}{\Delta \theta_{(t)}^2} \left(1 - \frac{\Delta \theta_{(t)} \sin \Delta \theta_{(t)}}{2(1 - \cos \Delta \theta_{(t)})} \right) \{ \Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \times (\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(t)}) \} \right] dt$$

ここで $\Delta \theta_{(t)} \ll 1$ とすると、上式の第3項の係数は $\frac{1}{\Delta \theta_{(t)}^2} \left(1 - \frac{\Delta \theta_{(t)} \sin \Delta \theta_{(t)}}{2(1 - \cos \Delta \theta_{(t)})} \right) \doteq \frac{1}{12}$ であるから

第2項と比較して $\frac{1}{2} \Delta \theta \gg \frac{1}{12} \Delta \theta^2$ で微小なので省略でき、上記の回転ベクトルの積分は下記で求めることができる。

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{(T)} = \int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt + \frac{1}{2} \int_{T-\Delta t}^T (\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(t)}) dt \dots\dots\dots (3.5-5)$$

さらに、上記の第2項における $\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)}$ は下記のようにジャイロ出力信号を用いて近似できる。

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \doteq \Delta \boldsymbol{\theta}_{B(t)} = \int \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \dots\dots\dots (3.5-6)$$

よって、第2項は下記のようにシンプソンの積分公式を用いて求められる。

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{(T)} &= \frac{1}{2} \int_{T-\Delta t}^T (\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(t)}) dt \doteq \frac{1}{2} \int_{T-\Delta t}^T \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(t)} \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{6} \left[\left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^{T-\Delta t} \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T-\Delta t)} \right\} + 4 \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t} \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T)} \right\} \right] \\ &= \frac{\Delta t}{12} \left[4 \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t} \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} + \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T)} \right\} \right] \dots\dots\dots (3.5-7) \end{aligned}$$

従って、式(3.5-5)は式(3.5-6)及び式(3.5-7)を代入して下記のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\theta}_{(T)} &= \int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt + \frac{\Delta t}{12} \left[4 \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t} \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} + \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T)} \right\} \right] \\ &= \Delta \boldsymbol{\theta}_{B(T)} + \frac{\Delta t}{12} \left[4 \left\{ \Delta \boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} + \left\{ \Delta \boldsymbol{\theta}_{B(T)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(T)} \right\} \right] \dots\dots\dots (3.5-8) \end{aligned}$$

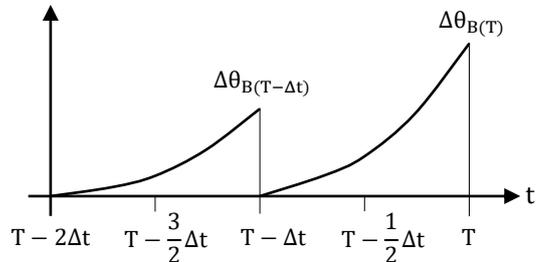
このように回転ベクトルは、ジャイロで計測できないノンコミュタティビティ・レートの第2項のみ補正することで求めることができる。この補正は一般にコーニング補正と呼ばれ、ジャイロ出力信号のサンプリング周期の取り方によっていくつかの方法が採られる。

(1) 姿勢更新周期と同じ周期で読み取ったジャイロ信号を用いたコーニング補正

姿勢更新周期を Δt としたとき、回転座標系の角速度は、現時点(T)と Δt 前の時点(T- Δt)でのジャイロ出力信号を用いて下記のように表される。

$$\omega_{B(T-\frac{3}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \dots\dots\dots (3.5-9)$$

$$\omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-10)$$



上記の Δt 間の平均角速度を用いると、 Δt 前の時点(T- Δt)から現時点(T)までの角速度は下記のように近似して表すことができる。

$$\begin{aligned} \omega_{B(t)} &= \omega_{B(T-\Delta t)} + \dot{\omega}_{B(T-\Delta t)}\{t - (T - \Delta t)\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\omega_{B(T-\frac{3}{2}\Delta t)} + \omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\right\} + \frac{1}{\Delta t}\left\{\omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} - \omega_{B(T-\frac{3}{2}\Delta t)}\right\}(t - T + \Delta t) \\ &= \frac{1}{2\Delta t}\{\Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \Delta\theta_{B(T)}\} + \frac{t - T + \Delta t}{\Delta t^2}\{\Delta\theta_{B(T)} - \Delta\theta_{B(T-\Delta t)}\} \\ &= \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{2} - \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t}\right)\Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{2} + \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t}\right)\Delta\theta_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-11) \end{aligned}$$

これを積分して

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{B(t)} &= \int_{T-\Delta t}^t \left\{ \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} - \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} + \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T)} \right\} dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{2\Delta t} + \frac{T-\Delta t}{\Delta t} t \right) \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2\Delta t} - \frac{T-\Delta t}{\Delta t} t \right) \Delta\theta_{B(T)} \Bigg|_{T-\Delta t}^t \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{2\Delta t} + \frac{T-\Delta t}{\Delta t} t - \frac{T-\Delta t}{2} + \frac{(T-\Delta t)^2}{2\Delta t} - \frac{(T-\Delta t)^2}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2\Delta t} - \frac{T-\Delta t}{\Delta t} t - \frac{T-\Delta t}{2} - \frac{(T-\Delta t)^2}{2\Delta t} + \frac{(T-\Delta t)^2}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T)} \\ &= \frac{t-T+\Delta t}{2\Delta t} \left(1 - \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{t-T+\Delta t}{2\Delta t} \left(1 + \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-12) \end{aligned}$$

式(3.5-11)及び式(3.5-12)より

$$\omega_{B(T)} = -\frac{1}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-13)$$

$$\Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{8} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{8} \Delta\theta_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-14)$$

従って、回転ベクトルは式(3.5-8)に式(3.5-3)のジャイロ出力信号、式(3.5-13)及び式(3.5-14)を代入して下記のように求められる。

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{(T)} &= \Delta\theta_{B(T)} + \frac{\Delta t}{12} \left[4 \left\{ \left(\frac{1}{8} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{8} \Delta\theta_{B(T)} \right) \times \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \Delta\theta_{B(T)} \times \left(-\frac{1}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \right) \right\} \right] \\ &= \Delta\theta_{B(T)} + \frac{\Delta t}{12} \left[\frac{4}{8\Delta t} \{ \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \times \Delta\theta_{B(T)} \} - \frac{1}{2\Delta t} \{ \Delta\theta_{B(T)} \times \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \} \right] \\ &= \Delta\theta_{B(T)} + \frac{1}{12} \{ \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \times \Delta\theta_{B(T)} \} \dots\dots\dots (3.5-15) \end{aligned}$$

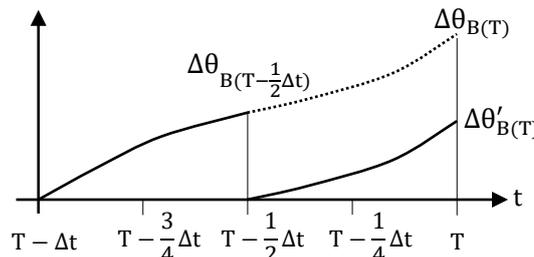
(2) 姿勢更新周期の2倍の周期で読み取ったジャイロ信号を用いたコーニング補正

姿勢更新周期を Δt としたとき、回転座標系の角速度は、現時点 (T) でのジャイロ出力信号 $\Delta\theta'_{B(T)}$ と $\frac{1}{2}\Delta t$ 前の時点 ($T - \frac{1}{2}\Delta t$) でのジャイロ出力信号 $\Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}$ を用いて下

記のように表される。

$$\omega_{B(T-\frac{3}{4}\Delta t)} = \frac{2}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \dots\dots\dots (3.5-16)$$

$$\omega_{B(T-\frac{1}{4}\Delta t)} = \frac{2}{\Delta t} \Delta\theta'_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-17)$$



上記の $\frac{1}{2}\Delta t$ 間の平均角速度を用いると、 $\frac{1}{2}\Delta t$ 前の時点 ($T - \frac{1}{2}\Delta t$) から現時点 (T) までの角速度は下記のように近似して表すことができる。

$$\begin{aligned} \omega_{B(t)} &= \omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \dot{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \left\{ t - \left(T - \frac{1}{2}\Delta t \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \omega_{B(T-\frac{3}{4}\Delta t)} + \omega_{B(T-\frac{1}{4}\Delta t)} \right\} + \frac{2}{\Delta t} \left\{ \omega_{B(T-\frac{1}{4}\Delta t)} - \omega_{B(T-\frac{3}{4}\Delta t)} \right\} \left(t - T + \frac{1}{2}\Delta t \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\theta'_{B(T)} \right\} + \frac{4}{\Delta t^2} \left\{ \Delta\theta'_{B(T)} - \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} \left(t - T + \frac{1}{2}\Delta t \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ 1 - \frac{4}{\Delta t} \left(t - T + \frac{1}{2}\Delta t \right) \right\} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t} \left\{ 1 + \frac{4}{\Delta t} \left(t - T + \frac{1}{2}\Delta t \right) \right\} \Delta\theta'_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-18) \end{aligned}$$

上式より

$$\omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta'_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-19)$$

$$\omega_{B(T)} = -\frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{3}{\Delta t} \Delta\theta'_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-20)$$

また、 Δt 間のジャイロ出力信号の角度増分は下記となるから

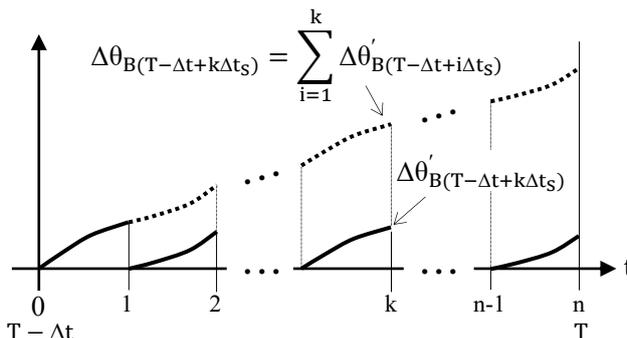
$$\Delta\theta_{B(T)} = \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\theta'_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-21)$$

従って、回転ベクトルは式(3.5-8)に式(3.5-19)、式(3.5-20)及び式(3.5-21)を代入して下記のように求められる。

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{(T)} &= \left(\Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\theta'_{B(T)} \right) + \frac{\Delta t}{12} \left[4 \left\{ \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \times \left(\frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta'_{B(T)} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\theta'_{B(T)} \right) \times \left(-\frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{3}{\Delta t} \Delta\theta'_{B(T)} \right) \right\} \right] \\ &= \left\{ \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\theta'_{B(T)} \right\} + \frac{2}{3} \left\{ \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \times \Delta\theta'_{B(T)} \right\} \dots\dots\dots (3.5-22) \end{aligned}$$

(3) 姿勢更新周期の数倍の周期で読み取ったジャイロ信号を用いたコーニング補正

慣性センサ・ユニット自身がプロセッサを内蔵してドリフト補償等のデータ処理を行う方式の場合、航法計算における姿勢更新周期より早い周期でデータ処理を行うことがある。特に、衝撃からセンサを守るためにショックマウントを介してセンサブロックを取り付けているような場合で、センサブロックが何らかの原因で航法計算における姿勢更新周期より早い周期でコーニング運動する可能性がある場合には、このコーニング周期より早い周期でコーニング補正演算を行う必要がある。



ジャイロ信号のサンプリング周期 Δt_s を姿勢更新周期 Δt の n 倍の周期としたとき、現時点 (T) から Δt 前の時点 (T- Δt) で決定された姿勢を基準として次の姿勢更新タイミングとなる現時点 (T) までの回転ベクトルを求める。

まず、回転座標系での回転角速度及びそれを積分した角度増分は、時点 (T- Δt) からサンプリング周期 Δt_s の整数倍 (k) 経過した時点で下記のように表すことができる。

$$\omega_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)} = \frac{1}{\Delta t_s} \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)} \dots\dots\dots (3.5-23)$$

$$\Delta \theta_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)} \equiv \int_{T-\Delta t}^{T-\Delta t+k\Delta t_s} \omega_{B(t)} dt = \sum_{i=1}^k \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \dots\dots\dots (3.5-24)$$

これらを式 (3.5-8) に代入して

$$\begin{aligned} \Delta \theta_{(T-\Delta t+k\Delta t_s)} &= \sum_{i=1}^k \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \{ \Delta \theta_{(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \times \Delta t_s \omega_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \} \\ &= \sum_{i=1}^k \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \{ \Delta \theta_{(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \times \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \} \dots\dots\dots (3.5-25) \end{aligned}$$

従って、回転ベクトルは上式を下記の漸化式に書き換えて求めることができる。

$$\Delta \theta_i = \{ \Delta \theta_{i-1} + \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \} + \frac{1}{2} [\{ \Delta \theta_{i-1} + \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \} \times \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)}] \dots\dots\dots (3.5-26)$$

ここで、 $\Delta \theta_0 = 0$

$$\begin{aligned} i &= 1 \sim n \\ n &= \frac{\Delta t}{\Delta t_s} \end{aligned}$$

また、コーニング補正項における回転ベクトル $\Delta \theta_{(t)}$ を式 (3.5-8) と同様に、ジャイロ出力信号を用いて近似すると下記で求めることができる。

$$\Delta \theta_{(T)} = \sum_{i=1}^n \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\{ \sum_{i=1}^k \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \} \times \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)}] \dots\dots\dots (3.5-27)$$

3.6 姿勢計算誤差及びその改良法

3.6.1 姿勢計算誤差の表現

基準座標系Iを(o-x, y, z)とし、回転座標系Bを(o-x_B, y_B, z_B)としたとき、基準座標系から見た回転座標系の方向余弦マトリクス及び四元数を下記のように表す。

$$D_B^I = \begin{pmatrix} x_B & y_B & z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.1-1)$$

$$Q_B^I = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.1-2)$$

また、航法計算によって得られた誤差を含んでいる姿勢を下記のように表す。

$$\tilde{D}_B^I = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B & \tilde{y}_B & \tilde{z}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} & \tilde{d}_{13} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} & \tilde{d}_{23} \\ \tilde{d}_{31} & \tilde{d}_{32} & \tilde{d}_{33} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.1-3)$$

$$\tilde{Q}_B^I = \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.1-4)$$

このとき、姿勢誤差は下記の3種類の誤差で表現される。

- ・ スケール誤差
- ・ スキュー誤差
- ・ ドリフト誤差

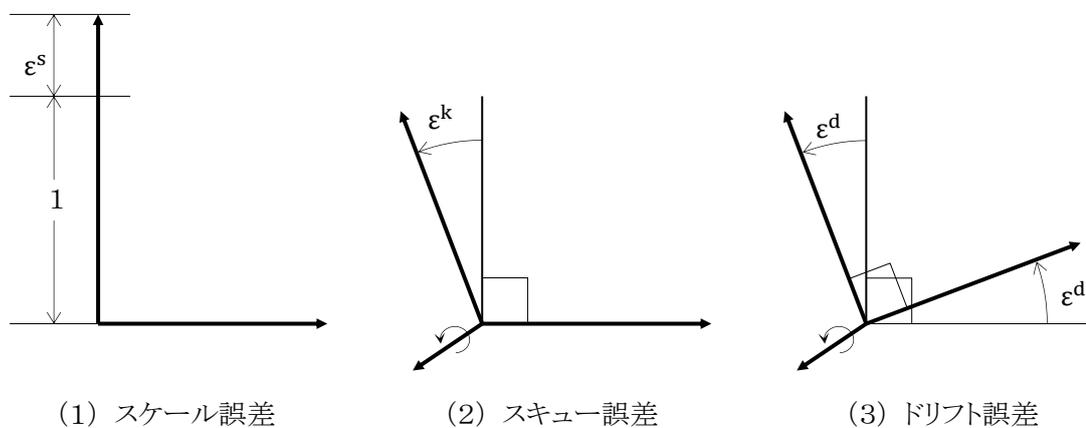


図3.6.1-1 姿勢計算誤差

(1) スケール誤差

回転座標系の各軸単位ベクトル及び四元数の大きさは1でなければならないが、この1からずれをスケール誤差と呼び、下記のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{D_x}^s &= |\tilde{x}_B| - 1 = \sqrt{\tilde{d}_{11}^2 + \tilde{d}_{21}^2 + \tilde{d}_{31}^2} - 1 \\ \epsilon_{D_y}^s &= |\tilde{y}_B| - 1 = \sqrt{\tilde{d}_{12}^2 + \tilde{d}_{22}^2 + \tilde{d}_{32}^2} - 1 \\ \epsilon_{D_z}^s &= |\tilde{z}_B| - 1 = \sqrt{\tilde{d}_{13}^2 + \tilde{d}_{23}^2 + \tilde{d}_{33}^2} - 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6.1-5)$$

ここで平方根の近似解はx = √Nより、f(x) = x² - N = 0にニュートン・ラプソンの逐次近似法を適用して次式で表される。

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - N}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{x_{n-1}} + x_{n-1} \right)$$

よって、式(3.6.1-5)は次式で近似される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{D_x}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{d}_{11}^2 + \tilde{d}_{21}^2 + \tilde{d}_{31}^2}{1} + 1 \right) - 1 \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{d}_{11}^2 + \tilde{d}_{21}^2 + \tilde{d}_{31}^2 - 1) \\ \varepsilon_{D_y}^s &= \frac{1}{2} (\tilde{d}_{12}^2 + \tilde{d}_{22}^2 + \tilde{d}_{32}^2 - 1) \\ \varepsilon_{D_z}^s &= \frac{1}{2} (\tilde{d}_{13}^2 + \tilde{d}_{23}^2 + \tilde{d}_{33}^2 - 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6.1-6)$$

同様に、四元数のスケール誤差は下記で表される。

$$\varepsilon_Q^s = \sqrt{\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2} - 1 = \frac{1}{2} (\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 - 1) \dots\dots\dots(3.6.1-7)$$

ところで、四元数を用いて方向余弦マトリクスは式(3.4-13)のように表せるから、これを式(3.6.1-5)に代入すると、方向余弦マトリクスと同様のスケール誤差が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Q_x}^s &= \sqrt{(\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_3^2)^2 + \{2(\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \tilde{q}_0\tilde{q}_3)\}^2 + \{2(\tilde{q}_1\tilde{q}_3 - \tilde{q}_0\tilde{q}_2)\}^2} - 1 \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\tilde{q}_0^4 + \tilde{q}_1^4 + \tilde{q}_2^4 + \tilde{q}_3^4 + \tilde{q}_0^2(\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_3^2) + \tilde{q}_1^2(\tilde{q}_0^2 - \tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_3^2) \\ &\quad - \tilde{q}_2^2(\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_3^2) - \tilde{q}_3^2(\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2) \\ &+ 4(\tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2 + 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0^2\tilde{q}_3^2) + 4(\tilde{q}_1^2\tilde{q}_3^2 - 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0^2\tilde{q}_2^2) \end{aligned} \right\} - 1 \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\tilde{q}_0^4 + \tilde{q}_1^4 + \tilde{q}_2^4 + \tilde{q}_3^4 + 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_1^2 - 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_2^2 - 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_3^2 - 2\tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2 - 2\tilde{q}_1^2\tilde{q}_3^2 \\ &+ 2\tilde{q}_2^2\tilde{q}_3^2 + 4(\tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2 + 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0^2\tilde{q}_3^2) + 4(\tilde{q}_1^2\tilde{q}_3^2 - 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0^2\tilde{q}_2^2) \end{aligned} \right\} - 1 \\ &= \sqrt{\tilde{q}_0^4 + \tilde{q}_1^4 + \tilde{q}_2^4 + \tilde{q}_3^4 + 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_1^2 + 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_2^2 + 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_3^2 + 2\tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2 + 2\tilde{q}_1^2\tilde{q}_3^2 + 2\tilde{q}_2^2\tilde{q}_3^2} - 1 \\ &= \sqrt{(\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2)^2} - 1 = \frac{1}{2} (\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 - 1) \end{aligned}$$

他の軸も同様に求めると、それらは全て等しく、式(3.6.1-7)と同じ下記で表される。

$$\varepsilon_{Q_x}^s = \varepsilon_{Q_y}^s = \varepsilon_{Q_z}^s = \frac{1}{2} (\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 - 1) \dots\dots\dots(3.6.1-8)$$

(2) スキュー誤差

回転座標系の各軸単位ベクトルは互いに直交していなければならないが、この直交条件からのずれをスキュー誤差と呼び、下記のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{D_x}^k &= \sin^{-1}(\tilde{y}_B \cdot \tilde{z}_B) = \sin^{-1}(\tilde{d}_{12}\tilde{d}_{13} + \tilde{d}_{22}\tilde{d}_{23} + \tilde{d}_{32}\tilde{d}_{33}) \cong \tilde{d}_{12}\tilde{d}_{13} + \tilde{d}_{22}\tilde{d}_{23} + \tilde{d}_{32}\tilde{d}_{33} \\ \varepsilon_{D_y}^k &= \sin^{-1}(\tilde{z}_B \cdot \tilde{x}_B) = \sin^{-1}(\tilde{d}_{13}\tilde{d}_{11} + \tilde{d}_{23}\tilde{d}_{21} + \tilde{d}_{33}\tilde{d}_{31}) \cong \tilde{d}_{13}\tilde{d}_{11} + \tilde{d}_{23}\tilde{d}_{21} + \tilde{d}_{33}\tilde{d}_{31} \\ \varepsilon_{D_z}^k &= \sin^{-1}(\tilde{x}_B \cdot \tilde{y}_B) = \sin^{-1}(\tilde{d}_{11}\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{21}\tilde{d}_{22} + \tilde{d}_{31}\tilde{d}_{32}) \cong \tilde{d}_{11}\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{21}\tilde{d}_{22} + \tilde{d}_{31}\tilde{d}_{32} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6.1-9)$$

四元数は1つのベクトル(オイラー軸)しか持たないので、スキュー誤差は発生しない。

$$\varepsilon_{Q_x}^k = \varepsilon_{Q_y}^k = \varepsilon_{Q_z}^k = 0 \dots\dots\dots(3.6.1-10)$$

(3) ドリフト誤差

計算して得られた姿勢と真の姿勢との間に回転角が存在する場合、これをドリフト誤差と呼び、下記のように表される。

$$\mathbf{D}_B^B = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \tilde{\mathbf{D}}_B^I = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_B \cdot \mathbf{x}_B & \tilde{\mathbf{y}}_B \cdot \mathbf{x}_B & \tilde{\mathbf{z}}_B \cdot \mathbf{x}_B \\ \tilde{\mathbf{x}}_B \cdot \mathbf{y}_B & \tilde{\mathbf{y}}_B \cdot \mathbf{y}_B & \tilde{\mathbf{z}}_B \cdot \mathbf{y}_B \\ \tilde{\mathbf{x}}_B \cdot \mathbf{z}_B & \tilde{\mathbf{y}}_B \cdot \mathbf{z}_B & \tilde{\mathbf{z}}_B \cdot \mathbf{z}_B \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_{D_z}^d & \varepsilon_{D_y}^d \\ \varepsilon_{D_z}^d & 1 & -\varepsilon_{D_x}^d \\ -\varepsilon_{D_y}^d & \varepsilon_{D_x}^d & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.6.1-11)$$

としたとき、ドリフト誤差は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{D_x}^d &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{y}}_B \cdot \mathbf{z}_B - \tilde{\mathbf{z}}_B \cdot \mathbf{y}_B) = \frac{1}{2}(\tilde{d}_{12}d_{13} - d_{12}\tilde{d}_{13} + \tilde{d}_{22}d_{23} - d_{22}\tilde{d}_{23} + \tilde{d}_{32}d_{33} - d_{32}\tilde{d}_{33}) \\ \varepsilon_{D_y}^d &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{z}}_B \cdot \mathbf{x}_B - \tilde{\mathbf{x}}_B \cdot \mathbf{z}_B) = \frac{1}{2}(\tilde{d}_{13}d_{11} - d_{13}\tilde{d}_{11} + \tilde{d}_{23}d_{21} - d_{23}\tilde{d}_{21} + \tilde{d}_{33}d_{31} - d_{33}\tilde{d}_{31}) \\ \varepsilon_{D_z}^d &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}_B \cdot \mathbf{y}_B - \tilde{\mathbf{y}}_B \cdot \mathbf{x}_B) = \frac{1}{2}(\tilde{d}_{11}d_{12} - d_{11}\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{21}d_{22} - d_{21}\tilde{d}_{22} + \tilde{d}_{31}d_{32} - d_{31}\tilde{d}_{32}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.6.1-12)$$

四元数のドリフト誤差は、式(3.6.1-11)と同様な回転を表す四元数を以下のように定義して

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_B^B &= (\mathbf{Q}_B^I)^* \otimes \tilde{\mathbf{Q}}_B^I = \begin{pmatrix} q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & (q_1 \ q_2 \ q_3) \\ -\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} & q_0 1 - \left[\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \times \right] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_0\tilde{q}_0 + q_1\tilde{q}_1 + q_2\tilde{q}_2 + q_3\tilde{q}_3 \\ q_0\tilde{q}_1 - q_1\tilde{q}_0 - q_2\tilde{q}_3 + q_3\tilde{q}_2 \\ q_0\tilde{q}_2 - q_2\tilde{q}_0 - q_3\tilde{q}_1 + q_1\tilde{q}_3 \\ q_0\tilde{q}_3 - q_3\tilde{q}_0 - q_1\tilde{q}_2 + q_2\tilde{q}_1 \end{pmatrix} \\ &= \cos \frac{\varepsilon_Q^d}{2} + \sin \frac{\varepsilon_Q^d}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\varepsilon_Q^d}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon_Q^d} \sin \frac{\varepsilon_Q^d}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_{Q_x}^d \\ \varepsilon_{Q_y}^d \\ \varepsilon_{Q_z}^d \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}_Q^d = \begin{pmatrix} \varepsilon_{Q_x}^d \\ \varepsilon_{Q_y}^d \\ \varepsilon_{Q_z}^d \end{pmatrix}$

$$\varepsilon_Q^d = |\boldsymbol{\varepsilon}_Q^d| = \sqrt{\varepsilon_{Q_x}^d{}^2 + \varepsilon_{Q_y}^d{}^2 + \varepsilon_{Q_z}^d{}^2}$$

上式において $\varepsilon_Q^d \ll 1$ であるから下記が成立する。

$$\frac{1}{\varepsilon_Q^d} \sin \frac{\varepsilon_Q^d}{2} \approx \frac{1}{\varepsilon_Q^d} \left\{ \frac{\varepsilon_Q^d}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\varepsilon_Q^d}{2} \right)^3 \right\} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_Q^d{}^2}{48} \approx \frac{1}{2}$$

従って、四元数のドリフト誤差は下記のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{Q_x}^d &= 2(q_0\tilde{q}_1 - q_1\tilde{q}_0 - q_2\tilde{q}_3 + q_3\tilde{q}_2) \\ \varepsilon_{Q_y}^d &= 2(q_0\tilde{q}_2 - q_2\tilde{q}_0 - q_3\tilde{q}_1 + q_1\tilde{q}_3) \\ \varepsilon_{Q_z}^d &= 2(q_0\tilde{q}_3 - q_3\tilde{q}_0 - q_1\tilde{q}_2 + q_2\tilde{q}_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6.1-13)$$

3.6.2 打ち切り誤差

航法計算において、角度増分を用いて姿勢更新を行う際に角度増分の正弦及び余弦を求める必要があるが、正弦及び余弦の計算はテーラー級数に展開して有限次数で打ち切るため、打ち切り誤差が生ずる。

方向余弦マトリクス法では式(3.2-10)で姿勢が更新され、角度増分の正弦及び余弦を含む係数は式(3.2-11)及び式(3.2-12)で表される。また、四元数法では式(3.4-29)で姿勢が更新され、角度増分の正弦及び余弦を含む係数は式(3.4-30)及び式(3.4-31)で表される。これらは次数nで打ち切ると、無限次数まで求めたものに比較して下記の打ち切り誤差を持つ。

$$\varepsilon_{S_n} = s_n - s_\infty \dots\dots\dots(3.6.2-1)$$

$$\varepsilon_{C_n} = c_n - c_\infty \dots\dots\dots(3.6.2-2)$$

ここで、 s_n, c_n : 打ち切り次数 n まで求めた係数

s_∞, c_∞ : 無限次数まで求めた係数

(1) スケール誤差

方向余弦マトリクス法では、式(3.6.1-6)に式(3.2-10)の更新マトリクス(推移マトリクス)の要素を代入して、次数打ち切りによるスケール誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{D_x}^s &= \frac{1}{2} \left[\{1 - c_n(\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2)\}^2 + \{c_n\Delta\theta_x\Delta\theta_y + s_n\Delta\theta_z\}^2 + \{c_n\Delta\theta_x\Delta\theta_z - s_n\Delta\theta_y\}^2 - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ c_n^2(\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2)^2 + c_n^2\Delta\theta_x^2(\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) + s_n^2(\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) - 2c_n(\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \{c_n^2(\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) + s_n^2 - 2c_n\} \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) (c_n^2\Delta\theta^2 + s_n^2 - 2c_n) \dots\dots\dots (3.6.2-3)\end{aligned}$$

上式において、次数 n を無限大とすると誤差はゼロとなるから下記が成り立つ。

$$c_\infty^2\Delta\theta^2 + s_\infty^2 - 2c_\infty = 0 \dots\dots\dots (3.6.2-4)$$

従って、式(3.6.2-3)に式(3.6.2-1)及び式(3.6.2-2)を代入し、さらに式(3.6.2-4)を代入した後で打ち切り誤差の高次項を省略すると

$$\begin{aligned}\varepsilon_{D_x}^s &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \{ (c_\infty + \varepsilon c_n)^2\Delta\theta^2 + (s_\infty + \varepsilon s_n)^2 - 2(c_\infty + \varepsilon c_n) \} \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \{ (c_\infty^2\Delta\theta^2 + s_\infty^2 - 2c_\infty) + 2c_\infty\varepsilon c_n\Delta\theta^2 + 2s_\infty\varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n + \varepsilon c_n^2\Delta\theta^2 + \varepsilon s_n^2 \} \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) (2c_\infty\varepsilon c_n\Delta\theta^2 + 2s_\infty\varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n)\end{aligned}$$

さらに上式に式(3.2-11)及び式(3.2-12)を代入して高次項を省略すると

$$\begin{aligned}\varepsilon_{D_x}^s &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \left(2 \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\Delta\theta^2} \varepsilon c_n \Delta\theta^2 + 2 \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n \right) \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \left\{ 2 \frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{2} + \dots\right)}{\Delta\theta^2} \varepsilon c_n \Delta\theta^2 + 2 \frac{\left(\Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} + \dots\right)}{\Delta\theta} \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \left\{ 2 \left(\frac{\Delta\theta^2}{2} - \dots\right) \varepsilon c_n + 2 \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{3!} + \dots\right) \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n \right\} \\ &= (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) (\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \\ \varepsilon_{D_y}^s &= (\Delta\theta_z^2 + \Delta\theta_x^2) (\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \\ \varepsilon_{D_z}^s &= (\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2) (\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \dots\dots\dots (3.6.2-5)\end{aligned}$$

同様に、四元数法では式(3.6.1-8)に式(3.4-29)における更新マトリクス(推移マトリクス)に対応する式(3.4-28)の要素を代入して、次数打ち切りによるスケール誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{Q_x}^s &= \varepsilon_{Q_y}^s = \varepsilon_{Q_z}^s = c_n^2 + s_n^2(\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) - 1 = c_n^2 + s_n^2\Delta\theta^2 - 1 \\ &= (c_\infty + \varepsilon c_n)^2 + (s_\infty + \varepsilon s_n)^2\Delta\theta^2 - 1 \\ &= (c_\infty^2 + s_\infty^2\Delta\theta^2 - 1) + \varepsilon c_n^2 + \varepsilon s_n^2\Delta\theta^2 + 2c_\infty\varepsilon c_n + 2s_\infty\varepsilon s_n\Delta\theta^2 \\ &= 2c_n\varepsilon c_n + 2\frac{1}{\Delta\theta} s_n \varepsilon s_n \Delta\theta^2 = 2 \cos \frac{\Delta\theta}{2} \varepsilon c_n + 2 \frac{1}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \varepsilon s_n \Delta\theta^2 \\ &= 2\varepsilon c_n + \varepsilon s_n \Delta\theta^2 \dots\dots\dots (3.6.2-6)\end{aligned}$$

(2) スキュー誤差

方向余弦マトリクス法では、式(3.6.1-9)に式(3.2-10)の更新マトリクス(推移マトリクス)の要素を代入して、

次数打ち切りによるスキュー誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{D_x}^k &= (c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_x - s_n \Delta \theta_z)(c_n \Delta \theta_z \Delta \theta_x + s_n \Delta \theta_y) + \{1 - c_n(\Delta \theta_z^2 + \Delta \theta_x^2)\}(c_n \Delta \theta_z \Delta \theta_y - s_n \Delta \theta_x) \\
 &\quad + (c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_z + s_n \Delta \theta_x)\{1 - c_n(\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2)\} \\
 &= c_n^2 \Delta \theta_x^2 \Delta \theta_y \Delta \theta_z - s_n^2 \Delta \theta_y \Delta \theta_z + s_n c_n \Delta \theta_x (\Delta \theta_y^2 - \Delta \theta_z^2) + c_n \Delta \theta_z \Delta \theta_y - c_n^2 (\Delta \theta_z^2 + \Delta \theta_x^2) \Delta \theta_z \Delta \theta_y \\
 &\quad - s_n \Delta \theta_x + s_n c_n \Delta \theta_x (\Delta \theta_z^2 + \Delta \theta_x^2) + c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_z + s_n \Delta \theta_x \\
 &\quad - c_n^2 (\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2) \Delta \theta_y \Delta \theta_z - s_n c_n \Delta \theta_x (\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2) \\
 &= -s_n^2 \Delta \theta_y \Delta \theta_z + 2c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_z - c_n^2 (\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2 + \Delta \theta_z^2) \Delta \theta_y \Delta \theta_z \\
 &= -\Delta \theta_y \Delta \theta_z (s_n^2 - 2c_n + c_n^2 \Delta \theta^2) \\
 &= -\Delta \theta_y \Delta \theta_z \{(s_\infty + \varepsilon s_n)^2 - 2(c_\infty + \varepsilon c_n) + (c_\infty + \varepsilon c_n)^2 \Delta \theta^2\} \\
 &= -\Delta \theta_y \Delta \theta_z \{(s_\infty^2 - 2c_\infty + c_\infty^2 \Delta \theta^2) + 2s_\infty \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n + 2c_\infty \varepsilon c_n \Delta \theta^2 + \varepsilon c_n^2 \Delta \theta^2\} \\
 &= -\Delta \theta_y \Delta \theta_z (2s_\infty \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n) \\
 &= -\Delta \theta_y \Delta \theta_z \left(2 \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \theta} \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n \right) = -\Delta \theta_y \Delta \theta_z \left(2 \frac{\Delta \theta - \frac{\Delta \theta^3}{3!} + \dots}{\Delta \theta} \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n \right) \\
 \varepsilon_{D_y}^k &= -2\Delta \theta_y \Delta \theta_z (\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \\
 \varepsilon_{D_z}^k &= -2\Delta \theta_x \Delta \theta_y (\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \left. \vphantom{\varepsilon_{D_y}^k}} \right\} \dots \dots \dots (3.6.2-7)
 \end{aligned}$$

四元数法ではスキュー誤差はない。

$$\varepsilon_{Q_x}^k = \varepsilon_{Q_y}^k = \varepsilon_{Q_z}^k = 0 \dots \dots \dots (3.6.2-8)$$

(3) ドリフト誤差

方向余弦マトリクス法では、式(3.6.1-12)に式(3.2-10)の更新マトリクス(推移マトリクス)の要素を次数 n 及び次数無限大として代入すると、打ち切り次数 n によるドリフト誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{D_x}^d &= \frac{1}{2} [(c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_x - s_n \Delta \theta_z)(c_\infty \Delta \theta_z \Delta \theta_x + s_\infty \Delta \theta_y) - (c_\infty \Delta \theta_y \Delta \theta_x - s_\infty \Delta \theta_z)(c_n \Delta \theta_z \Delta \theta_x + s_n \Delta \theta_y) \\
 &\quad + \{1 - c_n(\Delta \theta_z^2 + \Delta \theta_x^2)\}(c_\infty \Delta \theta_z \Delta \theta_y - s_\infty \Delta \theta_x) \\
 &\quad - \{1 - c_\infty(\Delta \theta_z^2 + \Delta \theta_x^2)\}(c_n \Delta \theta_z \Delta \theta_y \\
 &\quad - s_n \Delta \theta_x) + (c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_z + s_n \Delta \theta_x)\{1 - c_\infty(\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2)\} \\
 &\quad - (c_\infty \Delta \theta_y \Delta \theta_z + s_\infty \Delta \theta_x)\{1 - c_n(\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2)\}] \\
 &= \Delta \theta_x \{s_n - s_\infty + \Delta \theta^2 (c_n s_\infty - s_n c_\infty)\} \dots \dots \dots (3.6.2-9)
 \end{aligned}$$

上式に式(3.6.2-1)および式(3.6.2-2)を代入して整理すると

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{D_x}^d &= \Delta \theta_x [(s_\infty + \varepsilon s_n) - s_\infty + \Delta \theta^2 \{(c_\infty + \varepsilon c_n)s_\infty - (s_\infty + \varepsilon s_n)c_\infty\}] \\
 &= \Delta \theta_x (\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 s_\infty \varepsilon c_n) \\
 &= \Delta \theta_x \left(\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \theta} \varepsilon c_n \right) = \Delta \theta_x \left(\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 \frac{\Delta \theta - \frac{\Delta \theta^3}{3!} + \dots}{\Delta \theta} \varepsilon c_n \right) \\
 &= \Delta \theta_x (\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 \varepsilon c_n) \dots \dots \dots (3.6.2-10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{D_y}^d &= \Delta \theta_y \{s_n - s_\infty + \Delta \theta^2 (c_n s_\infty - s_n c_\infty)\} \\
 &= \Delta \theta_y (\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 \varepsilon c_n) \dots \dots \dots (3.6.2-11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{D_z}^d &= \Delta \theta_z \{s_n - s_\infty + \Delta \theta^2 (c_n s_\infty - s_n c_\infty)\} \\
 &= \Delta \theta_z (\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 \varepsilon c_n) \dots \dots \dots (3.6.2-12)
 \end{aligned}$$

同様に、四元数法では式(3.6.1-13)に式(3.4-29)における更新マトリクス(推移マトリクス)に対応する式(3.4-28)の要素を次数n及び次数無限大として代入すると、打ち切り次数nによるドリフト誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Q_x}^d &= 2(c_{\infty}\Delta\theta_x s_n - \Delta\theta_x s_{\infty} c_n - \Delta\theta_y s_{\infty}\Delta\theta_z s_n + \Delta\theta_z s_{\infty}\Delta\theta_y s_n) \\ &= 2\Delta\theta_x\{c_{\infty}s_n - s_{\infty}c_n\} \dots\dots\dots (3.6.2-13) \end{aligned}$$

上式に式(3.6.2-1)および式(3.6.2-2)を代入して整理し、さらに y, z についても同様に求めて、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Q_x}^d &= 2\Delta\theta_x\{c_{\infty}(s_{\infty} + \varepsilon s_n) - s_{\infty}(c_{\infty} + \varepsilon c_n)\} = 2\left\{\cos\frac{\Delta\theta}{2}\varepsilon s_n\Delta\theta_x - \frac{1}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\varepsilon c_n\Delta\theta_x\right\} \\ &= \Delta\theta_x(2\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \\ \varepsilon_{Q_y}^d &= 2\Delta\theta_y\{c_{\infty}s_n - s_{\infty}c_n\} = \Delta\theta_y(2\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \\ \varepsilon_{Q_z}^d &= 2\Delta\theta_z\{c_{\infty}s_n - s_{\infty}c_n\} = \Delta\theta_z(2\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \end{aligned} \dots\dots\dots (3.6.2-14)$$

3.6.3 姿勢計算誤差の改良法

角度増分の正弦及び余弦の計算は、テーラー級数に展開して下記のように表される。

$$\sin \Delta\theta = \Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} + \frac{\Delta\theta^5}{5!} - \frac{\Delta\theta^7}{7!} + \dots \dots\dots (3.6.3-1)$$

$$\cos \Delta\theta = 1 - \frac{\Delta\theta^2}{2!} + \frac{\Delta\theta^4}{4!} - \frac{\Delta\theta^6}{6!} + \dots \dots\dots (3.6.3-2)$$

そこで、方向余弦マトリクス法の式(3.2-11)～(3.2-12)及び四元数法の式(3.4-30)～(3.4-31)は、上記Δθのn乗まで用いた場合をn次の近似次数とすると、下記のように表される。

表3.6.3-1 姿勢更新における近似係数

次数		0次	1次	2次	3次	4次	5次	6次
sin Δθ			Δθ		$-\frac{\Delta\theta^3}{3!}$		$\frac{\Delta\theta^5}{5!}$	
cos Δθ		1		$-\frac{\Delta\theta^2}{2!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{4!}$		$-\frac{\Delta\theta^6}{6!}$
方向余弦 マトリクス 法	$s_n = \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}$		1		$-\frac{\Delta\theta^2}{3!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{5!}$	
	$c_n = \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\Delta\theta^2}$	0		$\frac{1}{2}$		$-\frac{\Delta\theta^2}{4!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{6!}$
四元数法	$s_n = \frac{1}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{\Delta\theta^2}{2^3 \cdot 3!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{2^5 \cdot 5!}$	
	$c_n = \cos \frac{\Delta\theta}{2}$	1		$-\frac{\Delta\theta^2}{2^2 \cdot 2!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{2^4 \cdot 4!}$		$-\frac{\Delta\theta^6}{2^6 \cdot 6!}$

上記の表に示したようにn次で打ち切った場合は、3.6.2項に示した打ち切り誤差が発生する。このうち、スケール誤差は下記のように正規化することで除去でき、スキュー誤差は直交化することで除去できる。

$$\underline{x}_B = \frac{\tilde{x}_B}{|\tilde{x}_B|} = \frac{\tilde{x}_B}{\sqrt{\tilde{x}_B \cdot \tilde{x}_B}} \doteq \frac{\tilde{x}_B}{\frac{1}{2}\{(\tilde{x}_B \cdot \tilde{x}_B) + 1\}} = \frac{\tilde{x}_B}{1 + \frac{(\tilde{x}_B \cdot \tilde{x}_B) - 1}{2}}$$

上式に $\frac{1}{1+\varepsilon} \doteq 1 - \varepsilon$ (但し、 $\varepsilon \ll 1$)を適用して

$$\underline{x}_B \doteq \left\{1 - \frac{(\tilde{x}_B \cdot \tilde{x}_B) - 1}{2}\right\} \tilde{x}_B = \left\{\frac{3 - (\tilde{x}_B \cdot \tilde{x}_B)}{2}\right\} \tilde{x}_B \dots\dots\dots (3.6.3-3)$$

正規化した \underline{x}_B を求めたら \tilde{y}_B と直交化してから正規化して \underline{z}_B を求める。

$$\underline{z}_B = \frac{\underline{x}_B \times \underline{\tilde{y}}_B}{|\underline{x}_B \times \underline{\tilde{y}}_B|} = \left\{ \frac{3 - (\underline{x}_B \times \underline{\tilde{y}}_B) \cdot (\underline{x}_B \times \underline{\tilde{y}}_B)}{2} \right\} (\underline{x}_B \times \underline{\tilde{y}}_B) \dots\dots\dots (3.6.3-4)$$

$$\underline{y}_B = \underline{z}_B \times \underline{x}_B \dots\dots\dots (3.6.3-5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_B^I &= \frac{\tilde{\mathbf{Q}}_B^I}{|\tilde{\mathbf{Q}}_B^I|} = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}_B^I}{\sqrt{\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2}} \doteq \frac{\tilde{\mathbf{Q}}_B^I}{\frac{1}{2}(\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 + 1)} \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}_B^I \frac{3 - (\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2)}{2} \dots\dots\dots (3.6.3-6) \end{aligned}$$

ドリフト誤差は、式(3.6.2-10)～(3.6.2-12)及び式(3.6.2-14)に示した打ち切り誤差が小さくなるように、上記の表に示した係数を調整することで改良することが出来る。

(1) 方向余弦マトリクス(参考)

方向余弦マトリクス法は式(3.6.2-9)のようにドリフト誤差が表されるから、これらを再掲すると、下記のように表される。

$$\varepsilon_{D_P}^d = \Delta\theta_P \{s_n - s_\infty + \Delta\theta^2(c_n s_\infty - s_n c_\infty)\} \dots\dots\dots (3.6.3-7)$$

ここで、P=x、y、z

上式で近似次数が2次の場合は、 s_n 、 s_∞ 及び c_∞ にそれぞれの式を代入し、その結果がゼロになるように c_n の式を下記のように決定すればよい。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D_P}^d &= \Delta\theta_P \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) + \Delta\theta^2 \left\{ c_n \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) - 1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \dots \right) \right\} \right] = 0 \\ c_n &= \frac{\left[-\frac{1}{\Delta\theta^2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) \right\} + 1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \dots \right) \right]}{\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} - \frac{\Delta\theta^2}{30} + \dots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \dots} \doteq \frac{1}{3} \dots\dots\dots (3.6.3-8) \end{aligned}$$

同様に、近似次数が4次の場合は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D_P}^d &= \Delta\theta_P \left[\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \Delta\theta^2 \left\{ c_n \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \dots \right) \right\} \right] = 0 \\ c_n &= \frac{\left[-\frac{1}{\Delta\theta^2} \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) \right\} + \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \dots \right) \right]}{\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{7\Delta\theta^2}{60} + \dots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots} \doteq \frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{30} \dots\dots\dots (3.6.3-9) \end{aligned}$$

さらに、近似次数が6次の場合は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D_P}^d &= \Delta\theta_P \left[\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \Delta\theta^2 \left\{ c_n \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} - \dots \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{120 \times 6} - \dots \right) \right\} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{-\frac{1}{\Delta\theta^2} \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} + \dots \right) \right\} + \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{120 \times 6} - \dots \right)}{\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} + \dots \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{31\Delta\theta^4}{2520} + \dots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} - \dots} \doteq \frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{840} \dots \dots \dots (3.6.3-10)$$

(2) 四元数

四元数法は式(3.6.2-13)のようにドリフト誤差が表されるから、これらを再掲すると、下記のように表される。

$$\varepsilon_{Q_P}^d = 2\Delta\theta_P \{c_\infty s_n - s_\infty c_n\}, \quad P = x, y, z \dots \dots \dots (3.6.3-11)$$

上式で近似次数が2次の場合は、 s_n 、 s_∞ 及び c_∞ にそれぞれの式を代入し、その結果がゼロになるように c_n の式を下記のように決定すればよい。

$$\varepsilon_{Q_P}^d = 2\Delta\theta_P \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \dots \right) \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \dots \right) c_n \right\} = 0$$

$$c_n = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \dots \right)}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \dots} = \frac{1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \dots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \dots} \doteq 1 - \frac{\Delta\theta^2}{12} \dots \dots \dots (3.6.3-12)$$

同様に、近似次数が4次の場合は

$$\varepsilon_{Q_P}^d = 2\Delta\theta_P \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \dots \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \dots \right) c_n \right\} = 0$$

$$c_n = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} \right) \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \dots \right)}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \dots} = \frac{1 - \frac{\Delta\theta^2}{12} + \frac{\Delta\theta^4}{256} - \dots}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \dots} \doteq 1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{480} \dots \dots \dots (3.6.3-13)$$

さらに、近似次数が6次の場合は

$$\varepsilon_{Q_P}^d = 2\Delta\theta_P \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{3840 \times 10 \times 12} + \dots \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \frac{\Delta\theta^6}{3840 \times 12 \times 14} + \dots \right) c_n \right\} = 0$$

$$c_n = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} \right) \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{3840 \times 10 \times 12} + \dots \right)}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \frac{\Delta\theta^6}{3840 \times 12 \times 14} + \dots}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{12} + \frac{\Delta\theta^4}{240} - \frac{3\Delta\theta^6}{384 \times 16 \times 7} + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \frac{\Delta\theta^6}{3840 \times 12 \times 14} + \dots} \doteq 1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{53760} \dots \dots \dots (3.6.3-14)$$

上記の近似係数を改良した結果をまとめて表3.6-2に示す。

表3.6.3-2 姿勢更新における近似係数の改良

次数		改良2次	改良4次	改良6次
方向余弦 マトリクス法 (参考)	$s_n = \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}$	1	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{6}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120}$
	$c_n = \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\Delta\theta^2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{30}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{840}$
四元数法	$s_n = \frac{1}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840}$
	$c_n = \cos \frac{\Delta\theta}{2}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{12}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{480}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{54760}$

3.6.4 姿勢誤差の評価

慣性航法で求めた姿勢には下記の誤差が含まれる。

- ☆ 観測値(角度増分)が持っている誤差
 - センサ誤差
 - 量子化誤差
- ☆ 更新計算における誤差
 - 打ち切り誤差
 - 切り捨て誤差
 - 丸め誤差
- ☆ 観測できないコーニングドリフトの補正残差

(1) センサ誤差

補足5.4項に衛星打上用大型ロケットにおける慣性センサ(IMU)の主要特性例を示す。

(2) 量子化誤差

ジャイロは角速度を積分し、それが一定の量に達したときに一つのパルスが生成され、そのパルスを積算することで角度積算値が得られる。量子化の過程で1パルスに満たない積分量は保持されるので、パルス出力値は下記の量子化誤差を持つ。

$$\varepsilon P = \pm \frac{P}{2} \dots\dots\dots (3.6.4-1)$$

ここで、P:パルスウェイト

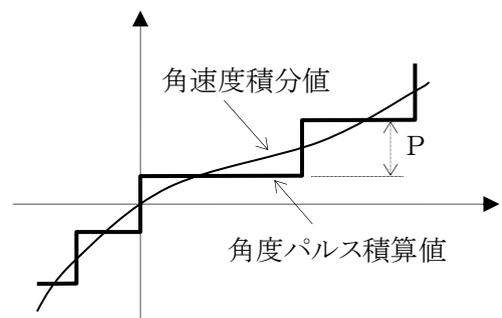


図3.6.4-1 量子化誤差

上記の量子化誤差を含んだパルス出力値は下記のように表される。

$$\theta_{Pi} = P_i + \varepsilon P_i \dots\dots\dots (3.6.4-2)$$

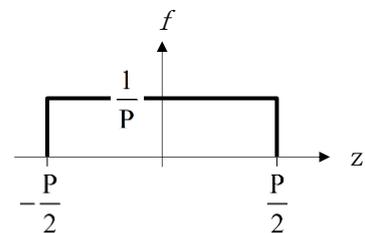
この量子化誤差は分布区間 $[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}]$ で下図に示したような確率密度関数を持った一様分布と考えることができるので、下記の統計量で表される。

$$E(\varepsilon P_i) = 0 \quad : \text{量子化誤差の平均}$$

$$E(\varepsilon P_i \varepsilon P_j) = \delta_{ij} \sigma^2 \quad : \text{量子化誤差の分散}$$

ここで、E:期待値オペレータ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$



また、この量子化誤差の分散は、下記で表される。

$$\sigma^2 = E(\varepsilon P_i^2) = \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \{z^2 f(z)\} dz = \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \left\{ z^2 \frac{1}{P} \right\} dz = \frac{z^3}{3P} \Big|_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} = \frac{2}{3P} \left(\frac{P}{2} \right)^3 = \frac{P^2}{12} \dots\dots\dots (3.6.4-3)$$

角度積算値は、上記の誤差を持ったパルスを積算するから、下記のように表される。

$$\theta = \sum_{i=1}^n (P_i + \varepsilon P_i) \dots\dots\dots (3.6.4-4)$$

$$\mu_\theta = E(\theta) = E\left(\sum_{i=1}^n (P_i + \varepsilon P_i) \right) = \sum_{i=1}^n E(P_i + \varepsilon P_i) = \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n E(\varepsilon P_i) = \sum_{i=1}^n P_i \dots\dots\dots (3.6.4-5)$$

$$\begin{aligned}
 E(\theta - \mu_\theta)^2 &= E(\theta^2 - 2\mu_\theta\theta + \mu_\theta^2) = E(\theta^2) - 2\mu_\theta E(\theta) + E(\mu_\theta^2) = E(\theta^2) - 2\mu_\theta^2 + \mu_\theta^2 = E(\theta^2) - \mu_\theta^2 \\
 &= E\left(\sum_{i=1}^n (P_i + \varepsilon P_i)\right)^2 - \mu_\theta^2 = E\left\{\left(\sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right)^2\right\} - \mu_\theta^2 \\
 &= E\left\{\left(\sum_{i=1}^n P_i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^n P_i \sum_{i=1}^n \varepsilon P_i + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right)^2\right\} - \mu_\theta^2 \\
 &= E\left(\sum_{i=1}^n P_i\right)^2 + 2E\left(\sum_{i=1}^n P_i \sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right) + E\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right)^2 - \mu_\theta^2 \\
 &= E(\mu_\theta)^2 + 2\mu_\theta E\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right) + E\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right)^2 - \mu_\theta^2 = E\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right)^2 \\
 &= E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon P_i \varepsilon P_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(\varepsilon P_i \varepsilon P_j) = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = n\sigma^2 = n \frac{P^2}{12} \dots\dots\dots (3.6.4-6)
 \end{aligned}$$

従って、累積量子化誤差の標準偏差は下記で表される。

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\sqrt{12}} \sqrt{n} \dots\dots\dots (3.6.4-7)$$

この角度積算は慣性センサ・ユニット(IMU)の中で行われるので、IMU誤差(ランダムウォーク)と等価となり、上式のデータ数nは角度パルスの累積数であるから、IMU出力データには下記の累積量子化誤差が含まれることとなる。

$$\theta = \int_0^T |\omega| dt : \text{累積角度} \dots\dots\dots (3.6.4-8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\sqrt{12}} \sqrt{n} = \frac{P}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{\theta}{P}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \sqrt{\theta P} : \text{累積量子化誤差} \dots\dots\dots (3.6.4-9)$$

ここで、 ω : 角速度

(3) 打ち切り誤差

姿勢更新における多項式の打ち切り誤差は、3.6.3項に示した改良が行われる。スケール誤差は式(3.6.3-3)～(3.6.3-5)及び式(3.6.3-6)のように正規化することで取り除くことができるが、スキュー誤差を取り除くための直交化は式(3.6.3-4)に示したように、3軸のうちの何れか1軸を基準として行うので、その基準とした軸がスキュー誤差を持っていると、ドリフト誤差と同じになってしまう。そこで方向余弦マトリクス法では、2.5.2(2)項のスキュー誤差式(3.6.2-7)と(3)項のドリフト誤差式(3.6.2-10)～(3.6.2-12)を合わせてドリフト誤差として評価する必要がある。

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{D_x}^d &= -2\Delta\theta_y \Delta\theta_z (\varepsilon_{S_n} - \varepsilon_{C_n}) + \Delta\theta_x (\varepsilon_{S_n} + \Delta\theta^2 \varepsilon_{C_n}) \\
 &= \varepsilon_{S_n} (\Delta\theta_x - 2\Delta\theta_y \Delta\theta_z) + \varepsilon_{C_n} (\Delta\theta^2 \Delta\theta_x + 2\Delta\theta_y \Delta\theta_z) \\
 \varepsilon_{D_y}^d &= \varepsilon_{S_n} (\Delta\theta_y - 2\Delta\theta_z \Delta\theta_x) + \varepsilon_{C_n} (\Delta\theta^2 \Delta\theta_y + 2\Delta\theta_z \Delta\theta_x) \\
 \varepsilon_{D_z}^d &= \varepsilon_{S_n} (\Delta\theta_z - 2\Delta\theta_x \Delta\theta_y) + \varepsilon_{C_n} (\Delta\theta^2 \Delta\theta_z + 2\Delta\theta_x \Delta\theta_y)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6.4-10)$$

表3.6.4-1に打ち切り誤差を示す。

表3.6.4-1 姿勢更新における打ち切り誤差

計算法	種類	改良2次	改良4次	改良6次	
方向余弦 マトリクス法 (参考)	スケール	$\frac{1}{6}(\Delta\theta_j^2 + \Delta\theta_k^2)$	$-\frac{\Delta\theta^2}{120}(\Delta\theta_j^2 + \Delta\theta_k^2)$	$\frac{\Delta\theta^4}{5040}(\Delta\theta_j^2 + \Delta\theta_k^2)$	
	スキュー	$-\frac{1}{3}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$\frac{\Delta\theta^2}{60}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$-\frac{\Delta\theta^4}{2520}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	
	ドリフト	直交化 無し	$-\frac{\Delta\theta^4}{45}\Delta\theta_i$	$-\frac{\Delta\theta^6}{840}\Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta^6}{45360}\Delta\theta_i$
		直交化 有り(*)	$-\frac{\Delta\theta^4}{45}\Delta\theta_i - \frac{1}{3}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$-\frac{\Delta\theta^6}{840}\Delta\theta_i + \frac{\Delta\theta^2}{60}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$\frac{\Delta\theta^6}{45360}\Delta\theta_i - \frac{\Delta\theta^4}{2520}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$
四元数法	スケール	$-\frac{\Delta\theta^2}{12}$	$\frac{\Delta\theta^4}{960}$	$\frac{\Delta\theta^6}{161280}$	
	スキュー	0	0	0	
	ドリフト	$-\frac{\Delta\theta^4}{720}\Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta^6}{53760}\Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta^8}{11612160}\Delta\theta_i$	

(*)スキュー誤差を除去するために直交化した場合。

上記の表に示したように、近似係数の改良を図ってドリフト誤差を小さくすると、スケール誤差とスキュー誤差が悪化することとなる。スケール誤差は正規化することで除去できるが、方向余弦マトリクス法におけるスキュー誤差は、直交化して除去しようとすると式(3.6.4-10)に示したようにドリフト誤差を増大させるので、スキュー誤差がない四元数にしかドリフト誤差の改善方法は適用できない。

(4) 切り捨て誤差

計算機のビット長が有限であることから生ずる誤差で、演算中に最下位ビットの重みに満たない数値が切り捨てられると、それが累積して大きくなる。特に、積分や累積加算する式においては、理論値どおりの切り捨て誤差が累積してドリフトしてゆくの観測される。

図2.5-2に示したように、長いビット長のデータの下位を切り捨てると、そのデータが正の場合でも負の場合でも数直線上で値が小さくなるので、正の場合は切り捨てられてゼロに、負の場合は切り捨てられて-LSBになる。よって、積算データの最下位ビットの重み(LSB)の半分が、平均的に切り捨てられ、下記で表される。

$$\varepsilon_T = -\frac{\text{LSB}}{2} \dots\dots\dots (3.6.4-11)$$

従って、演算周期 ΔT 毎に時間 T の間、積算演算を繰り返すと、下記の累積切り捨て誤差が発生する。

$$\varepsilon_T = -\left(\frac{\text{LSB}}{2}\right) \frac{T}{\Delta T} \dots\dots\dots (3.6.4-12)$$

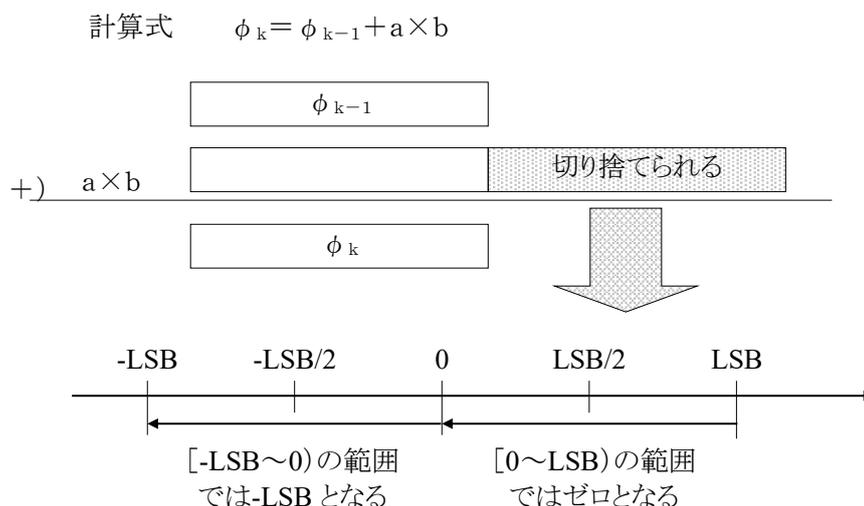


図3.6.4-2 切り捨て誤差

(5) 丸め誤差

上記(4)項の切り捨て誤差と同様に、計算機のビット長が有限であることから生ずる誤差であるが、演算中に最下位ビットの重みに満たない数値が四捨五入(丸め)される場合に発生する誤差で、下記のように表される。

$$\epsilon_R = \pm \frac{LSB}{2} \dots\dots\dots (3.6.4-13)$$

この誤差は平均値ゼロで分布区間 $[-\frac{LSB}{2}, \frac{LSB}{2}]$ の範囲で一様分布する考えられるので、量子化誤差と同様に、その分散は下記で表される。

$$\sigma_R^2 = \frac{LSB^2}{12} \dots\dots\dots (3.6.4-14)$$

従って、演算周期 ΔT 毎に時間Tの間、丸め誤差を持ったデータを積算すると、下記の累積丸め誤差が発生する。

$$\sigma_R = \frac{LSB}{\sqrt{12}} \sqrt{n} = \frac{LSB}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{T}{\Delta T}} \dots\dots\dots (3.6.4-15)$$

(6) コーニングドリフト補正残差

コーニング補正(座標回転の補正)は3.5項に述べた方法で行い、ジャイロで計測できない式(3.5-1)の第2項以降のノンコミュタティビティ・レートのうち、無視された第3項が補正残差となる。

姿勢更新は、回転ベクトルの式(3.5-1)を微小時間 Δt 間で積分して得た角度増分を用いて行うので、その微小時間 Δt 間の角度増分は微小と見なせて $\Delta\theta_{(t)} \ll 1$ であるから、第3項の係数は3.5項にも示したように $\frac{1}{\Delta\theta_{(t)}^2} \left(1 - \frac{\Delta\theta_{(t)} \sin \Delta\theta_{(t)}}{2(1 - \cos \Delta\theta_{(t)})}\right) \cong \frac{1}{12}$ となり、コーニングドリフト補正残差は下記で表される。

$$\begin{aligned} \epsilon_{\theta_{c(T)}} &= \int_{T-\Delta t}^T \left[\frac{1}{\Delta\theta_{(t)}^2} \left(1 - \frac{\Delta\theta_{(t)} \sin \Delta\theta_{(t)}}{2(1 - \cos \Delta\theta_{(t)})}\right) \{ \Delta\theta_{(t)} \times (\Delta\theta_{(t)} \times \omega_{B(t)}) \} \right] dt \\ &= \frac{1}{12} \int_{T-\Delta t}^T \{ \Delta\theta_{(t)} \times (\Delta\theta_{(t)} \times \omega_{B(t)}) \} dt = \frac{1}{12} \int_{T-\Delta t}^T \{ [\Delta\theta_{(t)} \times]^2 \cdot \omega_{B(t)} \} dt \dots\dots\dots (3.6.4-16) \end{aligned}$$

よって、式(3.5-7)と同様に、上式の $\Delta\theta_{(t)}$ をジャイロ出力信号 $\Delta\theta_{B(t)} = \int \omega_{B(t)} dt$ を用いて近似し、シンプソンの積分公式を用いて積分すれば

$$\begin{aligned}
 \varepsilon\theta_{c(T)} &= \frac{1}{12} \int_{T-\Delta t}^T \left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^t \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(t)} \right\} dt \\
 &= \frac{1}{12} \cdot \frac{\Delta t}{6} \left[\left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\Delta t} \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(T-\Delta t)} \right\} + 4 \left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t} \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^T \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(T)} \right\} \right] \\
 &= \frac{\Delta t}{72} \left[4 \left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t} \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} + \left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^T \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(T)} \right\} \right] \\
 &= \frac{\Delta t}{72} \left[4 \left\{ [\Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \times]^2 \cdot \omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} + \left\{ [\Delta\theta_{B(T)} \times]^2 \cdot \omega_{B(T)} \right\} \right] \dots\dots\dots (3.6.4-17)
 \end{aligned}$$

従って、上式に式(3.5-10)、式(3.5-13)および式(3.5-14)を代入して、コーニングドリフト補正残差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon\theta_{c(T)} &= \frac{\Delta t}{72} \left[4 \left\{ \left[\left(\frac{1}{8} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{8} \Delta\theta_{B(T)} \right) \times \right]^2 \cdot \left(\frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ [\Delta\theta_{B(T)} \times]^2 \cdot \left(-\frac{1}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \right) \right\} \right] \\
 &= \frac{\Delta t}{72} \left\{ \frac{1}{2\Delta t} [\Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \times]^2 \cdot \Delta\theta_{B(T)} - \frac{1}{2\Delta t} [\Delta\theta_{B(T)} \times]^2 \cdot \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \right\} \\
 &= \frac{1}{144} \left\{ [\Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \times]^2 \cdot \Delta\theta_{B(T)} - [\Delta\theta_{B(T)} \times]^2 \cdot \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \right\} \dots\dots\dots (3.6.4-18)
 \end{aligned}$$

ここでコーニング運動を式(2.3-5)のように下記で表して積分すると

$$\begin{aligned}
 \omega_{B(t)} &= \Omega \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \sin \theta \cos \Omega t \\ -\sin \theta \sin \Omega t \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.4-19) \\
 \Delta\theta_{B(T)} &= \int_{T-\Delta t}^T \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta) \\ \Omega \sin \theta \cos \Omega t \\ -\Omega \sin \theta \sin \Omega t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)t \\ \sin \theta \sin \Omega t \\ \sin \theta \cos \Omega t \end{pmatrix} \Bigg|_{T-\Delta t}^T = \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)\Delta t \\ \sin \theta \{ \sin \Omega (T) - \sin \Omega (T - \Delta t) \} \\ \sin \theta \{ \cos \Omega (T) - \cos \Omega (T - \Delta t) \} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)\Delta t \\ \sin \theta \{ \sin \Omega T - \sin \Omega T \cos \Omega \Delta t + \cos \Omega T \sin \Omega \Delta t \} \\ \sin \theta \{ \cos \Omega T - \cos \Omega T \cos \Omega \Delta t - \sin \Omega T \sin \Omega \Delta t \} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ここで $\theta \ll 1$ 及び $\Omega\Delta t \ll 1$ とすれば

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta_{B(T)} &= \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{2} \Omega \Delta t \\ \theta \left\{ \sin \Omega T - \left(1 - \frac{\Omega^2 \Delta t^2}{2} \right) \sin \Omega T + \Omega \Delta t \cos \Omega T \right\} \\ \theta \left\{ \cos \Omega T - \left(1 - \frac{\Omega^2 \Delta t^2}{2} \right) \cos \Omega T - \Omega \Delta t \sin \Omega T \right\} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} \theta \\ \Omega \Delta t \sin \Omega T + 2 \cos \Omega T \\ \Omega \Delta t \cos \Omega T - 2 \sin \Omega T \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.4-20)
 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} &= \int_{T-2\Delta t}^{T-\Delta t} \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta) \\ \Omega \sin \theta \cos \Omega t \\ -\Omega \sin \theta \sin \Omega t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)t \\ \sin \theta \sin \Omega t \\ \sin \theta \cos \Omega t \end{pmatrix} \Bigg|_{T-2\Delta t}^{T-\Delta t} \\
 &= \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)\Delta t \\ \sin \theta \{ \sin \Omega (T - \Delta t) - \sin \Omega (T - 2\Delta t) \} \\ \sin \theta \{ \cos \Omega (T - \Delta t) - \cos \Omega (T - 2\Delta t) \} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)\Delta t \\ \sin \theta \{ \sin \Omega T \cos \Omega \Delta t - \cos \Omega T \sin \Omega \Delta t - \sin \Omega T \cos 2 \Omega \Delta t + \cos \Omega T \sin 2 \Omega \Delta t \} \\ \sin \theta \{ \cos \Omega T \cos \Omega \Delta t + \sin \Omega T \sin \Omega \Delta t - \cos \Omega T \cos 2 \Omega \Delta t - \sin \Omega T \sin 2 \Omega \Delta t \} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{2} \Omega \Delta t \\ \theta \left\{ \left(1 - \frac{\Omega^2 \Delta t^2}{2} \right) \sin \Omega T - \Omega \Delta t \cos \Omega T - (1 - 2\Omega^2 \Delta t^2) \sin \Omega T + 2\Omega \Delta t \cos \Omega T \right\} \\ \theta \left\{ \left(1 - \frac{\Omega^2 \Delta t^2}{2} \right) \cos \Omega T + \Omega \Delta t \sin \Omega T - (1 - 2\Omega^2 \Delta t^2) \cos \Omega T - 2\Omega \Delta t \sin \Omega T \right\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{2} \Omega \Delta t \\ \theta \left\{ \frac{3}{2} \Omega^2 \Delta t^2 \sin \Omega T + \Omega \Delta t \cos \Omega T \right\} \\ \theta \left\{ \frac{3}{2} \Omega^2 \Delta t^2 \cos \Omega T - \Omega \Delta t \sin \Omega T \right\} \end{pmatrix} = \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} \theta \\ \{ 3\Omega \Delta t \sin \Omega T + 2 \cos \Omega T \} \\ \{ 3\Omega \Delta t \cos \Omega T - 2 \sin \Omega T \} \end{pmatrix} \cdots (3.6.4-21)
\end{aligned}$$

ここで式(3.6.4-20)及び式(3.6.4-21)を下記のように略記して

$$\begin{aligned}
\Delta \theta_{B(T)} &= \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} \theta \\ \Omega \Delta t \sin \Omega T + 2 \cos \Omega T \\ \Omega \Delta t \cos \Omega T - 2 \sin \Omega T \end{pmatrix} \equiv \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
\Delta \theta_{B(T-\Delta t)} &= \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} \theta \\ 3\Omega \Delta t \sin \Omega T + 2 \cos \Omega T \\ 3\Omega \Delta t \cos \Omega T - 2 \sin \Omega T \end{pmatrix} = \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \Omega \Delta t \sin \Omega T + 2 \cos \Omega T \\ \Omega \Delta t \cos \Omega T - 2 \sin \Omega T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\Omega \Delta t \sin \Omega T \\ 2\Omega \Delta t \cos \Omega T \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} x \\ y + b \\ z + c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3.6.4-18)式のシンメトリックマトリクスは上式より

$$[\Delta \theta_{B(T)} \times]^2 = \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^2 \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix} \cdots (3.6.4-22)$$

$$[\Delta \theta_{B(T-\Delta t)} \times]^2 = \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^2 \begin{pmatrix} -(y+b)^2 - (z+c)^2 & x(y+b) & x(z+c) \\ x(y+b) & -x^2 - (z+c)^2 & (y+b)(z+c) \\ x(z+c) & (y+b)(z+c) & -x^2 - (y+b)^2 \end{pmatrix} \cdots (3.6.4-23)$$

よって、コーニングドリフト補正残差は下記で表される。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{c(T)} &= \frac{1}{144} \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^3 \left\{ \begin{pmatrix} -(y+b)^2 - (z+c)^2 & x(y+b) & x(z+c) \\ x(y+b) & -x^2 - (z+c)^2 & (y+b)(z+c) \\ x(z+c) & (y+b)(z+c) & -x^2 - (y+b)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y + b \\ z + c \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{144} \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^3 \begin{pmatrix} -x(2yb + b^2 + 2zc + c^2) \\ 2x^2b + 2z^2b - yc^2 - 2yzc + zbc \\ 2x^2c + 2y^2c - zb^2 - 2yzb + ybc \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{144} \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^3 \begin{pmatrix} -8\theta(\Omega \Delta t)^2 \\ 4\theta^2(\Omega \Delta t) \sin \Omega T - 16(\Omega \Delta t)^2 s^2 c + 16(\Omega \Delta t) s^3 - 16(\Omega \Delta t)^2 c^3 + 16(\Omega \Delta t) s c^2 \\ 4\theta^2(\Omega \Delta t) \cos \Omega T + 16(\Omega \Delta t)^2 s c^2 + 16(\Omega \Delta t) c^3 + 16(\Omega \Delta t)^2 s^3 + 16(\Omega \Delta t) s^2 c \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{144} \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^3 \begin{pmatrix} -8\theta(\Omega \Delta t)^2 \\ 4\theta^2(\Omega \Delta t) \sin \Omega T - 16(\Omega \Delta t)^2 \cos \Omega T + 16(\Omega \Delta t) \sin \Omega T \\ 4\theta^2(\Omega \Delta t) \cos \Omega T + 16(\Omega \Delta t)^2 \sin \Omega T + 16(\Omega \Delta t) \cos \Omega T \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

高次項を省略して

$$\varepsilon_{c(T)} = \frac{\theta^3(\Omega \Delta t)^4}{144} \begin{pmatrix} -\theta(\Omega \Delta t) \\ 2 \sin \Omega T \\ 2 \cos \Omega T \end{pmatrix} \cdots (3.6.4-24)$$

ここで、 θ :コーニング半頂角

Ω :コーニングレート

Δt :データサンプリング時間間隔

4 位置及び速度の計算方法

4.1 位置及び速度

ロケットに作用する加速度は下記で表される。

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_F + \mathbf{g} \dots\dots\dots (4.1-1)$$

ここで、 \mathbf{a}_F : 推力と空気力による加速度ベクトル

\mathbf{g} : 重力加速度ベクトル

ロケットの航法においては、加速度計で \mathbf{a}_F を検出し、加速度計で検出できない \mathbf{g} を位置ベクトルから計算し、それらを積分した速度及び、さらに速度を積分した位置を下記のように求める。

$$\mathbf{v}_{(T)} = \mathbf{v}_{(T-\Delta T)} + \int_{T-\Delta T}^T \mathbf{a}_F dt + \int_{T-\Delta T}^T \mathbf{g} dt \dots\dots\dots (4.1-2)$$

$$\mathbf{r}_{(T)} = \mathbf{r}_{(T-\Delta T)} + \int_{T-\Delta T}^T \mathbf{v}_{(t)} dt \dots\dots\dots (4.1-3)$$

ここで、 \mathbf{v} : 慣性速度ベクトル

\mathbf{r} : 地心半径ベクトル

T : 現在時刻

ΔT : 位置・速度更新時間間隔(ロケットの場合、0.5秒~2秒程度)

上式の積分は、実際には離散化されたデータ(速度増分)を積算する形式で行うので、下記のように台形積分(改良オイラー法)によるイタレーション形式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}_{(r_{(T,0)})} &= \mathbf{g}_{(r_{(T-\Delta T)})} \\ \Delta \mathbf{v}_{(T),i} &= \Delta \mathbf{v}_{F(T)} + \frac{\Delta T}{2} \{ \mathbf{g}_{(r_{(T-\Delta T)})} + \mathbf{g}_{(r_{(T,i-1)})} \} \\ \mathbf{r}_{(T),i} &= \mathbf{r}_{(T-\Delta T)} + \left\{ \mathbf{v}_{(T-\Delta T)} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v}_{(T),i} \right\} \Delta t \\ \mathbf{v}_{(T)} &= \mathbf{v}_{(T-\Delta T)} + \Delta \mathbf{v}_{(T),i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1-4)$$

ここで、繰り返し回数は、 $i=1\sim 2$ で十分

$$\Delta \mathbf{v}_{F(T)} = \int_{T-\Delta T}^T \mathbf{a}_F dt: \text{推力と空気力による速度増分ベクトル(6.2項)}$$

上式で速度は繰り返しループに入れる必要はないが、簡略化するため上式のように表現した。また、重力加速度は J_2 項まで考慮して下記のとおり求められる。

$$\mathbf{g}_{(r)} = -\frac{\mu}{r^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \left\{ 1 - \frac{3}{2} j_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (5 \sin^2 \phi_r - 1) \right\} \\ \frac{y}{r} \left\{ 1 - \frac{3}{2} j_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (5 \sin^2 \phi_r - 1) \right\} \\ \frac{z}{r} \left\{ 1 - \frac{3}{2} j_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (5 \sin^2 \phi_r - 3) \right\} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4.1-5)$$

ここで、 $\mu = 3.986009 \times 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$: 地球重力定数

$j_2 = 1.082628 \times 10^{-3}$: 地球重力ポテンシャル調和係数

$a_e = 6378.142 \text{ km}$: 地球赤道半径

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_r \cos \lambda_r \\ \cos \phi_r \sin \lambda_r \\ \sin \phi_r \end{pmatrix}$$

ϕ_r : 地心緯度

λ_r : 経度

4.2 推力と空気力による速度増分ベクトル

ストラップダウン型の慣性センサ・ユニット(IMU)においては、加速度計は入力軸が機体の回転と共に方向を変えるので、それが検出した加速度を積分した値は座標基準が定かでない。このため、この積分値を微分して機体座標系から見た加速度に戻して回転の補正をしながら積分するか、慣性座標系に変換して積分するかして、定まった座標系での速度を求める必要がある。通常は、計算所要時間の観点から、計算量が少なくて済む機体座標系で求める方式を採る。実際には離散化されたデータの処理なので微小時間での速度増分が得られたら、それに回転の補正を施して積算する方式で、以下のように求める。

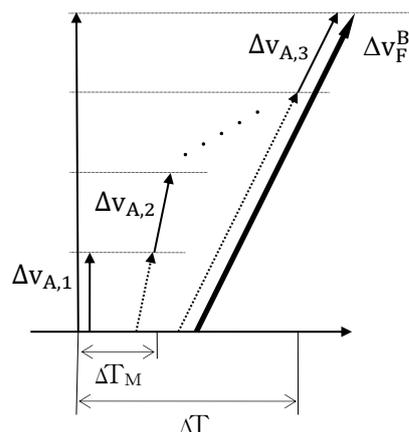


図4.2-1 回転座標系での速度増分の積算

まず、推力と空気力による加速度は、それを積分した速度が機体座標系で得られているものとする、その速度を微分して下記のように表すことができる。

$$\mathbf{v}_{F(t)} = \int_0^t \mathbf{a}_{F(\tau)} dt = \int_0^t (\mathbf{D}_{B(\tau)}^I \cdot \mathbf{a}_{F(\tau)}^B) d\tau = \mathbf{D}_{B(t)}^I \cdot \mathbf{v}_{F(t)}^B \dots\dots\dots (4.2-1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{F(t)} &= \dot{\mathbf{D}}_{B(t)}^I \cdot \mathbf{v}_{F(t)}^B + \mathbf{D}_{B(t)}^I \cdot \dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^B = \mathbf{D}_{B(t)}^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times] \cdot \mathbf{v}_{F(t)}^B + \mathbf{D}_{B(t)}^I \cdot \dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^B \\ &= \mathbf{D}_{B(t)}^I \cdot (\boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times \mathbf{v}_{F(t)}^B + \dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^B) \dots\dots\dots (4.2-2) \end{aligned}$$

- ここで、 \mathbf{v}_F : 慣性座標系から見た推力と空気力による速度ベクトル
- $\dot{\mathbf{v}}_F$: 慣性座標系から見た推力と空気力による加速度ベクトル
- \mathbf{D}_B^I : 慣性座標系から見た機体座標系の方向余弦マトリクス
- $\boldsymbol{\omega}_B$: 機体座標系の回転角速度ベクトル
- \mathbf{v}_F^B : 機体座標系から見た推力と空気力による速度ベクトル
- \mathbf{a}_F^B : 機体座標系から見た推力と空気力による加速度ベクトル

従って、式(4.2-2)から機体座標系での速度の微係数は下記のように表され、これを積分して速度を求める式が得られる。

$$\dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^B = (\mathbf{D}_{B(t)}^I)^T \cdot \dot{\mathbf{v}}_{F(t)} - \boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times \mathbf{v}_{F(t)}^B = \mathbf{a}_{F(t)}^B - \boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times \mathbf{v}_{F(t)}^B \dots\dots\dots (4.2-3)$$

$$\mathbf{v}_{F(t)}^B = \int_0^t \mathbf{a}_{F(\tau)}^B d\tau - \int_0^t \boldsymbol{\omega}_{B(\tau)} \times \mathbf{v}_{F(\tau)}^B d\tau \dots\dots\dots (4.2-4)$$

上式の右辺第1項はIMUから得られる速度で、機体と共に回転して時々刻々変わる入力軸方向の加速度を積分したデータであり、第2項は回転補正項(コリオリの力)である。

ところで推力と空気力による速度ベクトルは、式(4.1-4)に示したように、慣性座標系から見た単位時間あたりの速度増分として用いるので、上式(4.2-4)の機体座標系から見た推力と空気力による加速度ベクトルの積分は、式(4.1-4)における単位時間 ΔT での速度増分として求め、それを慣性座標系に座標変換して式(4.1-4)に繋ぐことになる。

$$\Delta \mathbf{v}_{F(T)}^B = \int_{T-\Delta T}^T \mathbf{a}_{F(t)}^B dt - \int_{T-\Delta T}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times \Delta \mathbf{v}_{F(t)}^B dt \dots\dots\dots (4.2-5)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{F(T)} = \mathbf{D}_{B(T)}^I \cdot \Delta \mathbf{v}_{F(T)}^B \dots\dots\dots (4.2-6)$$

次に式(4.2-5)の速度増分を求める。まず、IMUからは下記の出力が得られる。

$$\mathbf{v}_{A(T)} = \int_{t_0}^T \mathbf{a}_{F(t)}^B dt \dots\dots\dots (4.2-7)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{G(T)} = \int_{t_0}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \dots\dots\dots (4.2-8)$$

ここで、 t_0 : 任意の時刻(不定)

このIMU出力を ΔT_M 時間間隔でサンプリングし、その差分を取って

$$\Delta \mathbf{v}_{A(T)} = \mathbf{v}_{A(T)} - \mathbf{v}_{A(T-\Delta T_M)} \dots\dots\dots (4.2-9)$$

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)} = \boldsymbol{\theta}_{G(T)} - \boldsymbol{\theta}_{G(T-\Delta T_M)} \dots\dots\dots (4.2-10)$$

ここで、 $\Delta T_M = \frac{\Delta T}{m}$: 速度増分積算時間間隔 (通常、姿勢更新周期 (IMUデータサンプリング周期) と同じで、ロケットの場合、30Hzから50Hz程度)

上記の差分を用いて、 $t=T-\Delta T_M \sim T$ の期間における速度増分及び角速度は下記のように近似的に表される。

$$\mathbf{v}_{F(t)}^B = \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \frac{\Delta \mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M} (t - T + \Delta T_M) \dots\dots\dots (4.2-11)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{B(t)} = \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} : (\text{一定}) \dots\dots\dots (4.2-12)$$

従って、式(4.2-5)に式(4.2-11)及び式(4.2-12)を代入して ΔT_M 間だけ積分すると

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{F(T)}^B &= \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \Delta \mathbf{v}_{A(T)} - \int_{T-\Delta T_M}^T \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} \times \left\{ \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \frac{\Delta \mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M} (t - T + \Delta T_M) \right\} dt \\ &= \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \Delta \mathbf{v}_{A(T)} \\ &\quad - \left[\left\{ \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} \times \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B \right\} t - \left\{ \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} \times \frac{\Delta \mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M} \right\} \left\{ \frac{t^2}{2} - (T - \Delta T_M)t \right\} \right]_{T-\Delta T_M}^T \\ &= \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \Delta \mathbf{v}_{A(T)} - \left\{ \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} \times \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B \right\} \Delta T_M - \left\{ \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} \times \frac{\Delta \mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M} \right\} \frac{\Delta T_M^2}{2} \\ &= \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \Delta \mathbf{v}_{A(T)} - \Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)} \times \left\{ \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \frac{\Delta \mathbf{v}_{A(T)}}{2} \right\} \dots\dots\dots (4.2-13) \end{aligned}$$

よって、 ΔT 間の速度増分の式(4.2-5)は、下記の漸化式で表される。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{F,0}^B &= 0 \\ \Delta \mathbf{v}_{F,k}^B &= \Delta \mathbf{v}_{F,k-1}^B + \Delta \mathbf{v}_{A,k} - \Delta \boldsymbol{\theta}_{G,k} \times \left\{ \Delta \mathbf{v}_{F,k-1}^B + \frac{\Delta \mathbf{v}_{A,k}}{2} \right\} \dots\dots\dots (4.2-14) \end{aligned}$$

ここで、 $k=1 \sim m$

$\Delta \mathbf{v}_{A,k} \equiv \Delta \mathbf{v}_{A(T-\Delta T+k\Delta T_M)}$ であり、 $\Delta \mathbf{v}_{A,m} \equiv \Delta \mathbf{v}_{A(T)}$ である。下添字のkは以下同様。

上記の $k=m$ 時点の速度増分を下記のように慣性系に座標変換して式(4.1-4)にインプットする。

$$\Delta \mathbf{v}_{F(T)} = \mathbf{D}_{B(T)}^I \cdot \Delta \mathbf{v}_{F,m}^B \dots\dots\dots (4.2-15)$$

4.3 座標回転の補正 (スカーリング補正)

IMUの内部でドリフト補償等のデータ処理を行うため、上記4.2項の ΔT_M より短い時間間隔で加速度計からのパルス出力を積算することがあり、この場合にも座標系の回転補正を行う必要がある。上記4.2項の回転補正の方法は式(4.2-3)に示したように、常に現在時刻の機体座標系から見た速度積算値を表すようにしているが、ここでは積算開始時点の機体座標系から見た速度積算となるように、この積算開始時点の機体座標系を慣性系と見なして積算する方法を示す。この補正は微少時間での角度増分を用いた座標変換であるが、方向余弦マトリクスや四元数等を用いた座標変換とは区別してスカーリング補正と呼ばれている。

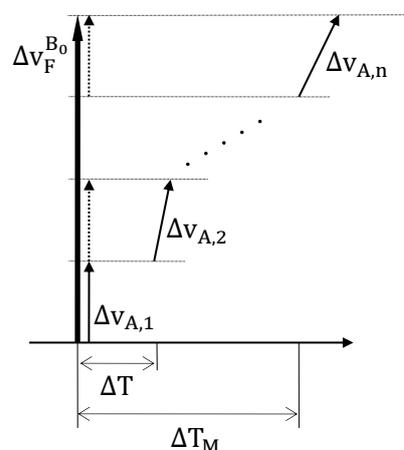


図4.3-1 座標回転の補正 (スカーリング補正)

まず、式(4.2-2)及び式(4.2-3)より、基準時刻 T_0 における機体座標系 B_0 での速度の微係数は下記のように表される。

$$\dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^{B_0} = \mathbf{D}_{B(t)}^{B_0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times \mathbf{v}_{F(t)}^B + \dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^B) = \mathbf{D}_{B(t)}^{B_0} \cdot \mathbf{a}_{F(t)}^B \quad \dots\dots\dots (4.3-1)$$

上式の方角余弦マトリクスは、微小時間の間では下記のように近似して表すことができる。

$$\mathbf{D}_{B(t)}^{B_0} = \mathbf{1} + \left[\int_{T_0}^t \boldsymbol{\omega}_{B(\tau)} d\tau \times \right] \quad \dots\dots\dots (4.3-2)$$

これを(4.3-1)式に代入して積分すれば、下記のように速度を求める式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{F(t)}^{B_0} &= \Delta \mathbf{v}_{F(t-\Delta T_s)}^{B_0} + \left(\mathbf{1} + \left[\int_{T_0}^t \boldsymbol{\omega}_{B(\tau)} d\tau \times \right] \right) \cdot \int_{t-\Delta T_s}^t \mathbf{a}_{F(\tau)}^B d\tau \\ &= \Delta \mathbf{v}_{F(t-\Delta T_s)}^{B_0} + \Delta \mathbf{v}_{A(t)} + \Delta \boldsymbol{\theta}_{G(t)} \times \Delta \mathbf{v}_{A(t)} \quad \dots\dots\dots (4.3-3) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta \mathbf{v}_{A(t)} = \int_{t-\Delta T_s}^t \mathbf{a}_{F(\tau)}^B d\tau = \mathbf{v}_{A(t)} - \mathbf{v}_{A(t-\Delta T_s)}$

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(t)} = \int_{T_0}^t \boldsymbol{\omega}_{B(\tau)} d\tau = \boldsymbol{\theta}_{G(t)} - \boldsymbol{\theta}_{G(T_0)} = \sum_{i=1}^j \Delta \boldsymbol{\theta}_{G,i}$$

$$t = T_0 + j\Delta T_s$$

ΔT_s : IMU内での加速度データサンプリング周期

従って、上式の $\Delta T_M = n\Delta T_s$ 間のスカーリング補正を含む速度増分は、下記で表される。

$$\Delta \mathbf{v}_{F(T)}^{B_0} = \sum_{j=1}^n \left\{ \Delta \mathbf{v}_{A,j} + \left(\sum_{i=1}^j \Delta \boldsymbol{\theta}_{G,i} \right) \times \Delta \mathbf{v}_{A,j} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.3-4)$$

上式で求めた $\Delta \mathbf{v}_{F(T)}^{B_0}$ が式(4.2-9)の $\Delta \mathbf{v}_{A(T)}$ に対応する速度増分で、実際にはIMU内部でこれを積算して式(4.2-9)の $\mathbf{v}_{A(T)}$ として出力される。

5 補足

5.1 オイラー角から固定角への変換

$\mathbf{D}_B^I = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k$: オイラー角による方向余弦マトリクス

$(\mathbf{D}_B^I) = [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i$: 固定角による回転マトリクス

このようにオイラー角と固定角では回転順が逆になる。

オイラー角から求めた方向余弦マトリクスと同じ値の回転マトリクスとなる固定角を求めるには、表3.3-2の回転順、例えば No.1 の $ijk=123$ のオイラー角では $[\theta_1]_1 \cdot [\theta_2]_2 \cdot [\theta_3]_3$ 。これとは回転軸が逆順の No.4 の $ijk=321$ のオイラー角では $[\theta_1]_3 \cdot [\theta_2]_2 \cdot [\theta_3]_1$ となっているところを、名称のみ θ_1 と θ_3 を入れ替えて $[\theta_3]_3 \cdot [\theta_2]_2 \cdot [\theta_1]_1$ とすれば固定角になる。従って、オイラー角から方向余弦マトリクスを求め、この方向余弦マトリクスから固定角に変換するのが便利である。これを全オイラー角について整理した結果を表5.1-1に示す。

また、固定角からオイラー角に変換するには、固定角から回転マトリクスを求め、それを方向余弦マトリクスと見なして、固定角とは逆順のオイラー角を表3.3-2に示したように求めればよい。

表5.1-1 方向余弦マトリクスから固定角への変換

オイラー角		固定角 $(\mathbf{D}_B^I) = [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i$			
No.	i, j, k	k, j, i	θ_3	θ_2	θ_1
1	1, 2, 3	3, 2, 1	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{11})$	$\sin^{-1}(-d_{31})$	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{33})$
2	2, 3, 1	1, 3, 2	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{22})$	$\sin^{-1}(-d_{12})$	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{11})$
3	3, 1, 2	2, 1, 3	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{33})$	$\sin^{-1}(-d_{23})$	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{22})$
4	3, 2, 1	1, 2, 3	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{33})$	$\sin^{-1}(d_{13})$	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{11})$
5	1, 3, 2	2, 3, 1	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{11})$	$\sin^{-1}(d_{21})$	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{22})$
6	2, 1, 3	3, 1, 2	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{22})$	$\sin^{-1}(d_{32})$	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{33})$
7	1, 2, 1	2, 1, 2	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{32})$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{23})$
8	2, 3, 2	3, 2, 3	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{13})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{31})$
9	3, 1, 3	1, 3, 1	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{21})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{12})$
10	3, 2, 3	2, 3, 2	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{12})$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{21})$
11	1, 3, 1	3, 1, 3	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{23})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{32})$
12	2, 1, 2	1, 2, 1	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{31})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{13})$

5.2 コーニングドリフトにおける逆マトリクス

2.3項に示した回転座標系のコーニング運動の角速度ベクトルは次のように表される。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \left\{ \mathbf{1} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta} \times] + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) [\boldsymbol{\theta} \times]^2 \right\}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \dots \dots \dots (5.2-1)$$

ここで θ はコーニング運動の半頂角で、上記にコーニング運動の回転ベクトル $\boldsymbol{\theta} = \theta \underline{\mathbf{e}}$ を代入して、

$$\boldsymbol{\omega}_B = \left\{ \mathbf{1} + \frac{\theta}{2}[\underline{\mathbf{e}} \times] + \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) [\underline{\mathbf{e}} \times]^2 \right\}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \dots \dots \dots (5.2-2)$$

ここで $p = \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right)$ と置いて、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_B &= \left\{ \mathbf{1} + \frac{\theta}{2}[\underline{\mathbf{e}} \times] + p[\underline{\mathbf{e}} \times]^2 \right\}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - p + p e_x^2 & -\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y & \frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \\ \frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y & 1 - p + p e_y^2 & -\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \\ -\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z & \frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z & 1 - p + p e_z^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

3行3列の逆マトリクスは次式で表される。

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32} & d_{32}d_{13} - d_{33}d_{12} & d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22} \\ d_{23}d_{31} - d_{21}d_{33} & d_{33}d_{11} - d_{31}d_{13} & d_{13}d_{21} - d_{11}d_{23} \\ d_{21}d_{32} - d_{22}d_{31} & d_{31}d_{12} - d_{32}d_{11} & d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = d_{11}d_{22}d_{33} + d_{12}d_{23}d_{31} + d_{13}d_{21}d_{32} - d_{11}d_{23}d_{32} - d_{12}d_{21}d_{33} - d_{13}d_{22}d_{31}$$

$\boldsymbol{\omega}_B$ の式に適用して、

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 - p + p e_x^2)(1 - p + p e_y^2)(1 - p + p e_z^2) \\ &\quad + \left(-\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(-\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) \left(-\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) \\ &\quad + \left(\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) \left(\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) - (1 - p + p e_x^2) \left(-\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) \left(\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) \\ &\quad - \left(-\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) (1 - p + p e_z^2) - \left(\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) (1 - p + p e_y^2) \left(-\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) \end{aligned}$$

Δ の右辺各項は、

$$\begin{aligned} &(1 - p + p e_x^2)(1 - p + p e_y^2)(1 - p + p e_z^2) \\ &= (1 - p) \{ (1 - p)^2 + p(1 - p)(e_y^2 + e_z^2) + p^2 e_y^2 e_z^2 \} \\ &\quad + p e_x^2 \{ (1 - p)^2 + p(1 - p)(e_y^2 + e_z^2) + p^2 e_y^2 e_z^2 \} \\ &= (1 - p)^3 + p(1 - p)^2(e_y^2 + e_z^2) + p^2(1 - p)e_y^2 e_z^2 \\ &\quad + p(1 - p)^2 e_x^2 + p^2(1 - p)e_x^2(e_y^2 + e_z^2) + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\ &= (1 - p)^3 + p(1 - p)^2(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + p^2(1 - p)(e_x^2 e_y^2 + e_x^2 e_z^2 + e_y^2 e_z^2) + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\ &\quad \left(-\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(-\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) \left(-\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) \\ &= -\frac{\theta}{2} e_z \left(\frac{\theta^2}{4} e_x e_y - \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_z - \frac{p\theta}{2} e_y^2 e_z + p^2 e_x e_y e_z^2 \right) \\ &\quad + p e_x e_y \left(\frac{\theta^2}{4} e_x e_y - \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_z - \frac{p\theta}{2} e_y^2 e_z + p^2 e_x e_y e_z^2 \right) \\ &= -\frac{\theta^3}{8} e_x e_y e_z + \frac{p\theta^2}{4} e_x^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4} e_y^2 e_z^2 - \frac{p^2 \theta}{2} e_x e_y e_z^3 \\ &\quad + \frac{p\theta^2}{4} e_x^2 e_y^2 - \frac{p^2 \theta}{2} e_x^3 e_y e_z - \frac{p^2 \theta}{2} e_x e_y^3 e_z + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) \left(\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right) \left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right) \\
&= \frac{\theta}{2}e_y \left(\frac{\theta^2}{4}e_x e_z + \frac{p\theta}{2}e_y e_z^2 + \frac{p\theta}{2}e_x^2 e_y + p^2 e_x e_y^2 e_z\right) \\
&\quad + pe_x e_z \left(\frac{\theta^2}{4}e_x e_z + \frac{p\theta}{2}e_y e_z^2 + \frac{p\theta}{2}e_x^2 e_y + p^2 e_x e_y^2 e_z\right) \\
&= \frac{\theta^3}{8}e_x e_y e_z + \frac{p\theta^2}{4}e_y^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_y^2 + \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y^3 e_z \\
&\quad + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_z^2 + \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y e_z^3 + \frac{p^2\theta}{2}e_x^3 e_y e_z + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad - (1-p+pe_x^2) \left(-\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right) \left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right) \\
&= (1-p) \left(\frac{\theta^2}{4}e_x^2 - p^2 e_y^2 e_z^2\right) + pe_x^2 \left(\frac{\theta^2}{4}e_x^2 - p^2 e_y^2 e_z^2\right) \\
&= (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_x^2 - p^2(1-p)e_y^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_x^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad - \left(-\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right) \left(\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right) (1-p+pe_z^2) \\
&= (1-p) \left(\frac{\theta^2}{4}e_z^2 - p^2 e_x^2 e_y^2\right) + pe_z^2 \left(\frac{\theta^2}{4}e_z^2 - p^2 e_x^2 e_y^2\right) \\
&= (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_z^2 - p^2(1-p)e_x^2 e_y^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_z^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad - \left(\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) (1-p+pe_y^2) \left(-\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) \\
&= (1-p) \left(\frac{\theta^2}{4}e_y^2 - p^2 e_x^2 e_z^2\right) + pe_y^2 \left(\frac{\theta^2}{4}e_y^2 - p^2 e_x^2 e_z^2\right) \\
&= (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_y^2 - p^2(1-p)e_x^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_y^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1-p)^3 + p(1-p)^2(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + p^2(1-p)(e_x^2 e_y^2 + e_x^2 e_z^2 + e_y^2 e_z^2) + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad - \frac{\theta^3}{8}e_x e_y e_z + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_y^2 e_z^2 - \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y e_z^3 + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_y^2 - \frac{p^2\theta}{2}e_x^3 e_y e_z - \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y^3 e_z \\
&\quad + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad + \frac{\theta^3}{8}e_x e_y e_z + \frac{p\theta^2}{4}e_y^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_y^2 + \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y^3 e_z + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_z^2 + \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y e_z^3 + \frac{p^2\theta}{2}e_x^3 e_y e_z \\
&\quad + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad + (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_x^2 - p^2(1-p)e_y^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_x^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad + (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_z^2 - p^2(1-p)e_x^2 e_y^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_z^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad + (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_y^2 - p^2(1-p)e_x^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_y^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&= (1-p)^3 + p(1-p)^2(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + (1-p)^2 + (1-p) \frac{\theta^2}{4}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) \\
&\quad + \frac{p\theta^2}{4} \{(e_x^4 + e_y^4 + e_z^4) + 2(e_x^2 e_y^2 + e_y^2 e_z^2 + e_x^2 e_z^2)\}
\end{aligned}$$

ここで下記を代入して、

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)^2 &= e_x^4 + e_x^2 e_y^2 + e_x^2 e_z^2 + e_x^2 e_y^2 + e_y^4 + e_z^2 e_y^2 + e_x^2 e_z^2 + e_y^2 e_z^2 + e_z^4 \\
&= e_x^4 + e_y^4 + e_z^4 + 2e_x^2 e_y^2 + 2e_y^2 e_z^2 + 2e_x^2 e_z^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_x^4 + e_y^4 + e_z^4 &= (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)^2 - 2(e_x^2 e_y^2 + e_y^2 e_z^2 + e_x^2 e_z^2) \\
&= 1 - 2(e_x^2 e_y^2 + e_y^2 e_z^2 + e_x^2 e_z^2)
\end{aligned}$$

$$e_x^4 + e_y^4 + e_z^4 + 2(e_x^2 e_y^2 + e_y^2 e_z^2 + e_x^2 e_z^2) = 1$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-p)^2 + (1-p)\frac{\theta^2}{4} + \frac{p\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \\ &= \frac{\theta^2}{4} + 1 - 2p + p^2 = \frac{\theta^2}{4} + 1 - 2\left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}\right) + \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}\right)^2 \\ &= \frac{\theta^2}{4} + 1 - 2 + \frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} + 1 - \frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{\theta^2}{4} \left(\frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2 = \frac{\theta^2}{4} \left\{1 + \left(\frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

次に、逆マトリクスの各要素は、

$$\begin{aligned} d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32} &= (1-p + pe_y^2)(1-p + pe_z^2) - \left(-\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right)\left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right) \\ &= (1-p)^2 + p(1-p)(e_y^2 + e_z^2) + p^2 e_y^2 e_z^2 + \frac{\theta^2}{4} e_x^2 - p^2 e_y^2 e_z^2 \\ &= (1-p)^2 + p(1-p)(1 - e_x^2) + \frac{\theta^2}{4} e_x^2 \\ &= (1-p)^2 + p(1-p) - p(1-p)e_x^2 + \frac{\theta^2}{4} e_x^2 \\ &= (1-p) + \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)\right\} e_x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{23}d_{31} - d_{21}d_{33} &= \left(-\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right)\left(-\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) - \left(\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right)(1-p + pe_z^2) \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_y - \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_z - \frac{p\theta}{2} e_y^2 e_z + p^2 e_x e_y e_z^2 - (1-p)\frac{\theta}{2} e_z - \frac{p\theta}{2} e_z^3 - p(1-p)e_x e_y - p^2 e_x e_y e_z^2 \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_y - \frac{p\theta}{2} e_z(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) - (1-p)\frac{\theta}{2} e_z - p(1-p)e_x e_y \\ &= \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)\right\} e_x e_y - \frac{\theta}{2} e_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{21}d_{32} - d_{22}d_{31} &= \left(\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right)\left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right) - (1-p + pe_y^2)\left(-\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_z + \frac{p\theta}{2} e_y e_z^2 + \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_y + p^2 e_x e_y^2 e_z + (1-p)\frac{\theta}{2} e_y - p(1-p)e_x e_z + \frac{p\theta}{2} e_y^3 - p^2 e_x e_y^2 e_z \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_z + \frac{p\theta}{2} e_y(e_x^2 + e_y^3 + e_z^2) + (1-p)\frac{\theta}{2} e_y - p(1-p)e_x e_z \\ &= \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)\right\} e_x e_z + \frac{\theta}{2} e_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{32}d_{13} - d_{33}d_{12} &= \left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right)\left(\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) - (1-p + pe_z^2)\left(-\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right) \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_y + \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_z + \frac{p\theta}{2} e_y^2 e_z + p^2 e_x e_y e_z^2 + (1-p)\frac{\theta}{2} e_z - p(1-p)e_x e_y + \frac{p\theta}{2} e_z^3 - p^2 e_x e_y e_z^2 \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_y + \frac{p\theta}{2} e_z(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + (1-p)\frac{\theta}{2} e_z - p(1-p)e_x e_y \\ &= \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)\right\} e_x e_y + \frac{\theta}{2} e_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{33}d_{11} - d_{31}d_{13} &= (1-p + pe_z^2)(1-p + pe_x^2) - \left(-\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right)\left(\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) \\ &= (1-p)^2 + p(1-p)(e_x^2 + e_z^2) + p^2 e_x^2 e_z^2 + \frac{\theta^2}{4} e_y^2 - p^2 e_x^2 e_z^2 \\ &= (1-p)^2 + \frac{\theta^2}{4} e_y^2 + p(1-p)(1 - e_y^2) \\ &= (1-p)^2 + p(1-p) + \frac{\theta^2}{4} e_y^2 - p(1-p)e_y^2 \\ &= (1-p) + \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)\right\} e_y^2 \end{aligned}$$

$$d_{31}d_{12} - d_{32}d_{11} = \left(-\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right)\left(-\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right) - \left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right)(1-p + pe_x^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\theta^2}{4} e_y e_z - \frac{p\theta}{2} e_x e_y^2 - \frac{p\theta}{2} e_x e_z^2 + p^2 e_x^2 e_y e_z - (1-p) \frac{\theta}{2} e_x - \frac{p\theta}{2} e_x^3 - p(1-p) e_y e_z - p^2 e_x^2 e_y e_z \\
&= \frac{\theta^2}{4} e_y e_z - \frac{p\theta}{2} e_x (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) - (1-p) \frac{\theta}{2} e_x - p(1-p) e_y e_z \\
&= \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} e_y e_z - \frac{\theta}{2} e_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22} &= \left(-\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(-\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) - \left(\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) (1-p + p e_y^2) \\
&= \frac{\theta^2}{4} e_x e_z - \frac{p\theta}{2} e_y e_z^2 - \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_y + p^2 e_x e_y^2 e_z - (1-p) \frac{\theta}{2} e_y - \frac{p\theta}{2} e_y^3 - p(1-p) e_x e_z - p^2 e_x e_y^2 e_z \\
&= \frac{\theta^2}{4} e_x e_z - \frac{p\theta}{2} e_y (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) - (1-p) \frac{\theta}{2} e_y - p(1-p) e_x e_z \\
&= \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} e_x e_z - \frac{\theta}{2} e_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{13}d_{21} - d_{11}d_{23} &= \left(\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) \left(\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) - (1-p + p e_x^2) \left(-\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) \\
&= \frac{\theta^2}{4} e_y e_z + \frac{p\theta}{2} e_x e_y^2 + \frac{p\theta}{2} e_x e_z^2 + p^2 e_x^2 e_y e_z + (1-p) \frac{\theta}{2} e_x - p(1-p) e_y e_z + \frac{p\theta}{2} e_x^3 - p^2 e_x^2 e_y e_z \\
&= \frac{\theta^2}{4} e_y e_z + \frac{p\theta}{2} e_x (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + (1-p) \frac{\theta}{2} e_x - p(1-p) e_y e_z \\
&= \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} e_y e_z + \frac{\theta}{2} e_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} &= (1-p + p e_x^2)(1-p + p e_y^2) - \left(-\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \\
&= (1-p)^2 + p(1-p)(e_x^2 + e_y^2) + p^2 e_x^2 e_y^2 + \frac{\theta^2}{4} e_z^2 - p^2 e_x^2 e_y^2 \\
&= (1-p)^2 + p(1-p)(1 - e_z^2) + \frac{\theta^2}{4} e_z^2 \\
&= (1-p) + \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} e_z^2
\end{aligned}$$

マトリクスにまとめて、

$$\Delta \mathbf{D}^{-1} = (1-p) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & e_z & -e_y \\ -e_z & 0 & e_x \\ e_y & -e_x & 0 \end{pmatrix} + \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} \begin{pmatrix} e_x^2 & e_x e_y & e_x e_z \\ e_x e_y & e_y^2 & e_y e_z \\ e_x e_z & e_y e_z & e_z^2 \end{pmatrix}$$

ここで下記を代入して、

$$\begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} = [\underline{e} \times] \quad \text{:式(2.1-4)}$$

$$\begin{pmatrix} e_x^2 & e_y e_x & e_z e_x \\ e_x e_y & e_y^2 & e_z e_y \\ e_x e_z & e_y e_z & e_z^2 \end{pmatrix} = [\underline{e} \times]^2 + \mathbf{1} \quad \text{:式(2.1-5)より}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{D}^{-1} &= (1-p) \mathbf{1} - \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times] + \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} ([\underline{e} \times]^2 + \mathbf{1}) \\
&= \left\{ \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \right\} \mathbf{1} - \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times] + \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} [\underline{e} \times]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^{-1} &= \frac{1}{\left\{ \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \right\}} \left[\left\{ \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \right\} \mathbf{1} - \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times] + \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} [\underline{e} \times]^2 \right] \\
&= \mathbf{1} - \frac{\frac{\theta}{2}}{\left\{ \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \right\}} [\underline{e} \times] + \left\{ \frac{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)}{\left\{ \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \right\}} \right\} [\underline{e} \times]^2
\end{aligned}$$

係数部に下記を代入して、

$$\begin{aligned}
 p &= \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}\right) \\
 \frac{\frac{\theta}{2}}{\left\{\frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2\right\}} &= \frac{1}{\frac{\theta}{2} \left\{1 + \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2\right\}} = \frac{2}{\theta \left\{1 + \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2}\right\}} = \frac{2(1 - \cos \theta)^2}{\theta \{2 - 2 \cos \theta\}} = \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \\
 \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)\right\} &= \frac{\frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 - (1-p)^2 - p(1-p)}{\frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2} = 1 - \frac{(1-p)}{\frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2} \\
 &= 1 - \frac{\left(\frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}\right)}{\frac{\theta^2}{4} + \left(\frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}\right)^2} = 1 - \frac{\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}}{\frac{\theta}{2} \left\{1 + \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2}\right\}} = 1 - \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\frac{\theta}{2} \{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta\}} \\
 &= 1 - \frac{\sin \theta}{\theta}
 \end{aligned}$$

さらに下記の置き換えを行って、

$$\begin{aligned}
 \underline{e} &= \frac{\underline{\theta}}{\theta} \\
 \mathbf{D}^{-1} &= \mathbf{1} - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\underline{\theta} \times] + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) [\underline{\theta} \times]^2 \\
 \underline{\omega}_B &= \left\{ \mathbf{1} - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\underline{\theta} \times] + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) [\underline{\theta} \times]^2 \right\} \cdot \dot{\underline{\theta}} \dots \dots \dots (5.2-3)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\underline{\omega}_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B$

5.3 4ジンバルオイラー角

4ジンバルオイラー角を用いた安定プラットフォーム装置を図5.3-1に示す。ジャイロと加速度計を搭載したプラットフォームを4ジンバル機構で支持して機体の回転運動から分離し、常時水平を保ちながら北方向を追従させるか、慣性空間に静止させる仕組みとなっている。慣性空間に静止させる方式は特に慣性プラットフォームと呼ばれ、H-I ロケットで採用された。

4ジンバル機構の回転軸は自由に滑り、理想的には機体の回転運動がプラットフォームに伝わらないモデルで表される。実際には回転軸の摩擦等による微小な外乱トルクが作用してプラットフォームが傾くが、それをジャイロで検出してモータを駆動し安定化させる。このため、この方式では入力角速度のレンジが小さいジャイロを用いることができる。3ジンバル方式のジンバル機構では機体の運動状態によっては、3つの回転軸が同一平面に並んで制御不能状態(ジンバルロック)になることがあるが、4ジンバル方式とすることでそれを避けることができる。

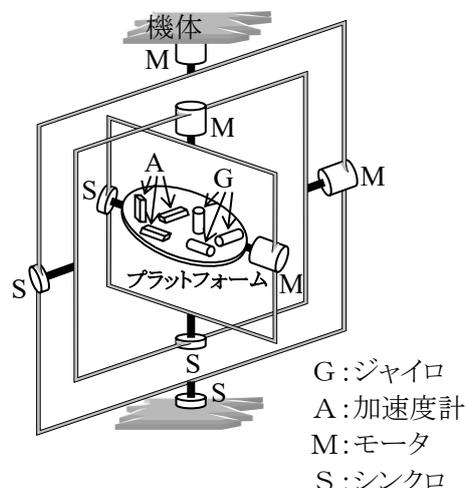


図5.3-1 4ジンバル安定プラットフォーム

図に示した4ジンバル機構は機体に結合される外側からアウターロールジンバル、ヨージンバル、インナーロールジンバル、ピッチ(プラットフォーム)ジンバルで構成される。ジャイロ信号はヨー、インナーロール、ピッチの3ジンバルを制御してプラットフォームを安定化させ、アウターロールジンバルはインナーロールジンバルのシンクロ(角度読取器)信号が常にゼロになるように制御される。このことにより、アウターロール、ヨー、ピッチの3ジンバル機構のように通常は作動している。このため、中間のヨージンバルがアウターロールジンバルに対して相対的に88度→89度と90度に接近するとジンバルロック状態に近づいてしまう。このようになるとジャイロ信号の制御でインナーロールジンバルが急速に傾く。その結果アウターロールジンバルが急速に180度反転して、90度に接近していたヨージンバルが89度→88度と角度が小さくなる方向に動くこととなってジンバルロックが回避される。アウターロールジンバルが180度反転する状態はジンバルフリップと呼んでいる。

5.4 センサ誤差

衛星打上用大型ロケットにおける慣性センサ(IMU)の主要特性例を表5.4-1に示す。

表5.4-1 慣性センサ(IMU)の主要特性例

項目	H-I ロケット	H-II ロケット	H-IIA ロケット
方式	4 ジンバル 安定プラットフォーム方式	ストラップダウン方式	ストラップダウン方式
ジャイロ	浮動型レート積分ジャイロ 計測レンジ 0.6 [°/s] ロングターム安定性(3σ) バイアス 0.035 [°/h] マスアンバランス 0.1 [°/h/m/s ²]	リング・レーザ・ジャイロ 計測レンジ 120 [°/s] ロングターム安定性(3σ) バイアス 0.096 [°/h] スケールファクタ 33×10 ⁻⁶	リング・レーザ・ジャイロ 計測レンジ 200 [°/s] ロングターム安定性(3σ) バイアス 0.031 [°/h] スケールファクタ 15×10 ⁻⁶
加速度計	振子式加速度計(オイルダンブ) 計測レンジ 98 [m/s ²] ロングターム安定性(3σ) バイアス 1275 [μm/s ²] スケールファクタ 150×10 ⁻⁶	振子式加速度計(ガスダンブ) 計測レンジ 198 [m/s ²] ロングターム安定性(3σ) バイアス 1275 [μm/s ²] スケールファクタ 150×10 ⁻⁶	振子式加速度計(ガスダンブ) 計測レンジ 198 [m/s ²] ロングターム安定性(3σ) バイアス 1128 [μm/s ²] スケールファクタ 144×10 ⁻⁶